Planche 1 :

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$P_n(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} x^k$$

1) À l'aide de l'ordinateur, tracer les courbes des fonctions P_n pour $-2 \leqslant x \leqslant 2$ et $1 \leqslant n \leqslant 10$. On utilisera la commande `plt.axis([-2, 0, 0, 5])` afin de cadrer la fenêtre graphique. Que remarquez-vous sur les lieux où P_n atteint un minimum ?

2) Pour $x \neq 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que :

$$P_n'(x) = \frac{u_n(x)}{(x-1)^2}$$

où u_n est une fonction polynomiale à déterminer.

3) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, donner l'allure du tableau de variations de la fonction P_n. Montrer en particulier que P_n possède un minimum unique sur $\mathbb{R}$. Dans la suite, on notera a_n le réel où P_n atteint son minimum.

4) Créer une fonction informatique `A` qui prend en argument un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et renvoie une valeur approchée de a_n.

5) Représenter graphiquement a_n en fonction de n pour $1 \leqslant n \leqslant 500$. Que peut-on conjecturer sur la limite de cette suite ?

6) Déterminer un équivalent simple de la quantité $\ln(2n + 1 - 2na_n)$ puis, en exploitant la relation $P_n'(a_n) = 0$, en déduire la limite de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

7) On pose maintenant $a_n = -1 + h_n$. Déterminer un équivalent de h_n lorsque $n \to +\infty$.

8) On pose $w_n = h_n - \frac{\ln n}{2n} - \frac{\ln 2}{n}$. À l'aide d'une représentation graphique, conjecturer la nature de la série $\sum w_n$.

9) Démontrer le résultat conjecturé à la question précédente.

Planche 2 :

On définit une suite $(A_n)_{n\geqslant 0}$ de polynômes par les conditions :

$A_0 = 1, \forall n \in \mathbb{N}, A_{n+1}' = A_n$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\int_0^1 A_{n+1}(x)dx = 0.$

1) Déterminer A_1, A_2, A_3.

2) Écrire un code qui calcule A_n (utiliser `numpy.polynomial`).

3) Comparer, pour plusieurs valeurs de n, $A_n(0)$ et $A_n(1)$; $A_n(X)$ et $A_n(1-X)$. Émettre des conjectures.

4) Tracer sur l'intervalle $]-1, 1[$ les courbes des fonctions $x \mapsto \dfrac{x}{e^x - 1}$ et $x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{10} A_k(0)x^k$. Émettre des conjectures.

5) Démontrer les conjectures émises.

Planche 3 :

On définit la suite de fonctions $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$:

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z},\ S_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{x+n} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{N} \frac{2x}{x^2 - n^2}$$

1) Écrire avec Python une fonction `S(N,x)` renvoyant $S_N(x)$.

2) Écrire une fonction prenant trois paramètres `N`, `a` et `b` et traçant le graphe de S_N sur le segment $[a, b]$.

3) Montrer que la suite $(S_N)_N$ converge simplement sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ vers une fonction que l'on notera S.

4) Montrer que la convergence est uniforme sur tout segment de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

5) Montrer que S est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, impaire et 1-périodique.

6) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z},\ S\left(\frac{x}{2}\right) + S\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2S(x)$$

7) Montrer que la fonction $f\ :\ x \mapsto \pi \operatorname{cotan}(\pi x) - S(x)$ vérifie la même relation.

8) Montrer que f se prolonge par continuité sur $\mathbb{R}$. En déduire S.

Planche 4 :

Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie la propriété $\mathscr{H}_n$ si ses coefficients appartiennent tous à $\{-1, 1\}$ et si les colonnes de A forment une famille orthogonale.

1) À l'aide de l'ordinateur, dénombrer les matrices vérifiant $\mathscr{H}_n$.
On pourra construire toutes les matrices à coefficients dans $\{-1, 1\}$ en remarquant qu'à chacune de ces matrices on peut associer un unique entier de $[\![0, 2^{n^2-1}]\!]$ écrit en base 2. On pourra aussi utiliser la fonction `reshape` de la bibliothèque `numpy`.

2) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients appartiennent tous à $\{-1, 1\}$. Montrer que A vérifie $\mathscr{H}_n$ si, et seulement si, $\frac{1}{\sqrt{n}}A$ est orthogonale.

3) Décrire les transformations du plan associées aux matrices vérifiant $\mathscr{H}_2$.

4) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\mathscr{H}_n$. Montrer que $A^\top$ vérifie $\mathscr{H}_n$.

5) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\mathscr{H}_n$. Montrer que la matrice déduite de A en changeant tous les signes sur une ligne ou sur une colonne vérifie $\mathscr{H}_n$.

6) À l'aide de l'ordinateur, dénombrer les matrices vérifiant $\mathscr{H}_4$ et dont la première ligne et la première colonne ne sont composées que de 1.