Planche 2 :

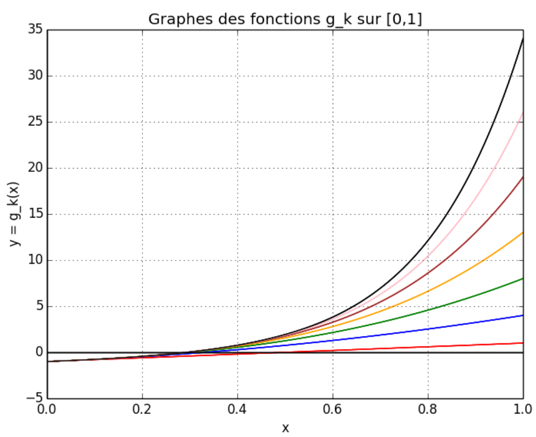
1) La fonction f_n est polynomiale, donc dérivable, et $f_n' \colon x \mapsto a_1 + \sum_{k=2}^{n} k a_k x^{k-1}$ est strictement positive sur $\mathbb{R}_+$ d'après les hypothèses sur les signes des coefficients. Elle admet donc au plus une racine dans $\mathbb{R}_+$, donc dans $\mathbb{R}_+^*$.

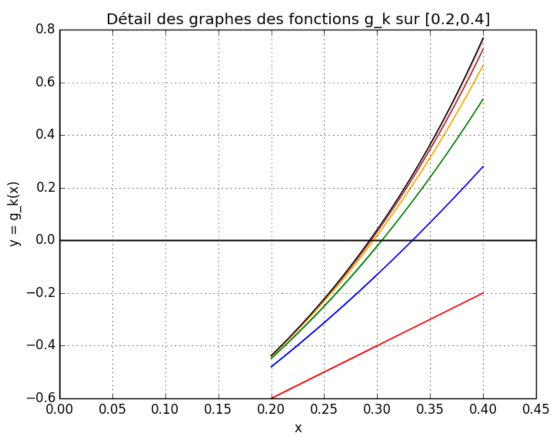
Par ailleurs, $f_n(0) = -a_0 < 0$ et $\lim_{+\infty} f_n(x) = +\infty$, donc il existe $b \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f(b) > 0$. En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction continue f_n sur $[0, b]$, on prouve l'existence d'au moins une racine de f_n dans $\mathbb{R}_+^*$.

Finalement, une telle fonction f_n s'annule une unique fois sur $\mathbb{R}_+^*$, en u_n.

2) **a)** Voici une manière de tracer des graphes sur un même dessin.

```
def g(n, x) :
    resultat = -1
    for k in range(1, n + 1) :
        resultat = resultat + (k + 1)*x**k
    return(resultat)
x = linspace(0, 1, 100)
L = []
couleurs = ["red", "blue", "green", "orange", "brown", "pink", "black"]
for k in range(1,8) :
    def h(x) :
        return(g(k, x))
    y = h(x)
    L.append(y)
for k in range(1,8) :
    plot(x, L[k - 1], color = couleurs[k - 1])
grid()
title("Graphes des fonctions g_k sur [0, 1]")
xlabel("x")
ylabel("y = g_k(x)")
axhline(color = "black")
axvline(color = "black")
show()
```





Sur le graphe demandé par l'énoncé (à droite), on n'y voit rien. Sur le zoom (à droite), on conjecture que (u_n) décroît, et que sa limite ℓ n'est pas nulle (proche de $0,3$?).

b) On pose $\forall x \in \mathbb{R}$, $G_n(x) = -x + \sum_{k=1}^{n} x^{k+1}$. On constate que $g_n = G_n'$ et que pour tout $x \neq 1$, on a $G_n(x) = -x + \frac{x^2 - x^{n+2}}{1-x}$. Il en résulte que

$$\forall x \neq 1, \quad g_n(x) = -1 + \frac{(2x - (n+2)x^{n+1})(1-x) + x^2 - x^{n+2}}{(1-x)^2} = \frac{(n+1)x^{n+2} - (n+2)x^{n+1} - 2x^2 + 4x}{(1-x)^2}$$

Le nombre u_n vérifie donc la relation

$$(n+1)u_n^{n+2} - (n+2)u_n^{n+1} - 2u_n^2 + 4u_n - 1 = 0.$$

Comme la suite de fonctions (g_n) est croissante sur $[0,1]$, c'est-à-dire que pour tout $x \in [0,1]$, la suite $(g_n(x))$ est croissante, on a

$$0 = g_n(u_n) \leqslant g_{n+1}(u_n).$$

Comme g_{n+1} est une fonction croissante sur $[0,1]$, on en déduit que la racine u_{n+1} de g_{n+1} est plus petite que u_n, ce qui montre que (u_n) décroît. Décroissante et minorée (par zéro), la suite (u_n) converge, et sa limite vérifie $0 \leqslant \ell \leqslant u_1 = \frac{1}{2}$.
Les résultats de croissances comparées montrent alors que les deux suites de termes généraux $(n+1)u_n^{n+2}$ et $(n+2)u_n^{n+1}$ convergent vers zéro. En passant à la limite dans l'équation satisfaite par u_n on trouve alors

$$2\ell^2 - 4\ell + 1 = 0.$$

La limite cherchée appartenant à $[0,1]$, elle vaut (la valeur numérique est en accord avec le zoom fourni plus haut) :

$$\ell = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \approx 0,29.$$

3) Dans cette question, on a donc $f_n(x) = -1 + \sum_{k=1}^{n} k!x^k$. Les mêmes arguments que dans le cas de la suite (g_n) montrent que f_n possède une unique racine dans $\mathbb{R}_+^*$, notée encore u_n, que la suite (u_n) décroît, donc qu'elle converge vers une limite notée encore ℓ, avec $\ell \geqslant 0$. Si jamais ℓ était strictement positive, on aurait $\forall n$, $0 < \ell \leqslant v_n$ donc, par croissance de la fonction f_n sur $\mathbb{R}_+$,

$$f_n(\ell) \leqslant f_n(v_n) = 0.$$

Or le membre de gauche de cette inégalité tend vers $+\infty$ par croissances comparées (le rayon de convergence de la série entière de terme général $k!z^k$ est nul), donc $+\infty \leqslant 0$: absurde. L'hypothèse $\ell > 0$ est donc fausse, donc

$$\ell = 0.$$

Planche 3 :

1)
```
import numpy.linalg as alg

def M(n) :
A = n p.zeros((n, n))
for j in range(n) :
    for i in range(n) :
        if i ! = j :
            A[i, j] = j + 1
return A
```

2)
```
for n in range(2, 11)  :
A = M(n)
print('n = ', n)
print(A)
print(alg.eigvals(A))
```
Conjecture : A possède n valeurs propres distinctes, une strictement positive et les autres strictement négatives.

3) On prouve plus précisément que $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(A) \iff \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\lambda+k} = 1$.
Un réel λ est valeur propre de A si et seulement si le système linéaire $(\mathscr{S}_\lambda)$: $AX = \lambda X$ possède une solution non nulle. Or

$$(\mathscr{S}_\lambda) \iff \forall k \in \{1, \cdots, n\}, \quad \sum_{i=1, i\neq k}^{n} i x_i = \lambda x_k \iff \forall k \in \{1, \cdots, n\}, \quad \sum_{i=1}^{n} i x_i = (\lambda+k)x_k.$$

Montrons tout d'abord que si $\lambda = -j$ pour un certain j de $\{1, \ldots, n\}$ alors λ n'est pas valeur propre. En effet si X est solution du système $(\mathscr{S}_\lambda)$, alors l'équation (L_j) donne $\sum_{i=1}^{n} i x_i = 0$ et, pour $k \neq j$, l'équation (L_k) donne ensuite $0 = (-j+k)x_k$, soit $x_k = 0$, pour tout $k \neq j$ mais $\sum_{i=1}^{n} i x_i = 0$ donne aussi $x_j = 0$ puis $X = 0$.

Reprenons alors l'étude de $(\mathscr{S}_\lambda)$ pour un réel $\lambda \notin \{-1, -2, \ldots, -n\}$.

— Supposons que λ est valeur propre et que X est une solution non nulle de $(\mathscr{S}_\lambda)$. Posons $s = \sum_{i=1}^{n} i x_i$. Il vient
$$\forall k \in \{1, \ldots, n\}, \quad x_k = \frac{s}{\lambda+k},$$
donc $s \neq 0$ (sinon $X = 0$) puis $s = \sum_{k=1}^{n} k x_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{ks}{\lambda+k}$ et en simplifiant par s, on obtient $1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\lambda+k}$.

— Réciproquement soit λ un réel tel que $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\lambda+k} = 1$. Le vecteur $X = (\frac{1}{\lambda+1}, \frac{2}{\lambda+2}, \ldots, \frac{n}{\lambda+n})^\top$ vérifie
$$\sum_{i=1}^{n} i x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{\lambda+i} = 1 = (\lambda+k)x_k$$
pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, ce qui équivaut au système $(\mathscr{S}_\lambda)$ et donc $AX = \lambda X$. Comme X est non nul, un tel λ est valeur propre de A.

4) La fonction $f \colon x \mapsto \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{x+k} - 1$ est définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{-n, -n+1, \ldots, -2, -1\}$ et pour $k \in \{2, \ldots, n\}$ f décroît strictement sur l'intervalle $]-k, -k+1[$ de $+\infty$ à $-\infty$. Par continuité, elle s'y annule une fois et une seule en λ_k. De même sur $]-1, +\infty[$ f décroît strictement de $+\infty$ à -1. On obtient ainsi n valeurs propres distinctes pour A_n, notées $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, vérifiant :

$$-n < \lambda_n < -n+1 < \lambda_{n-1} < -n+2 < \cdots < -3 < \lambda_3 < -2 < \lambda_2 < -1 < \lambda_1.$$

La matrice A_n est donc diagonalisable.

Remarque. — Comme $f(0) > 0$ on a en fait $\lambda_1 > 0$. Il semble aussi que λ_1 devienne de plus en plus grand avec n. Confirmons-le : on a $f(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n+k} - 1 \geqslant \frac{1}{2n}(\sum_{k=1}^{n} k) - 1 = \frac{n+1}{4} - 1 \geqslant 0$ si $n \geqslant 3$. On en déduit que $\lambda_1 \geqslant n$.

Planche 4 :

1)

```
>>> import math as ma
>>> def u(n) :
        p = 1
        for k in range(1, n + 1) :
            p* = 1 - 1/(k**2*(ma.pi)**2)
        return p
>>> for n in range(1, 11) :
        print(u(n))
0.8986788163576622
0.8759150160107488
0.8660540442116037
0.8605696929079941
0.8570819353123076
0.8546696976410768
0.8529024293678475
0.851552162435426
0.8504869738794859
0.8496252504108274
0.8496252504108274
>>> for n in range(1, 5) :
        print(1/u(10**n))
1.1769895015672622
1.187197611936348
1.1882747624557897
1.1883830654812606
```

2) On calcule un développement limité :

$$g(t) = \frac{t\cos t - \sin t}{t\sin t} = \frac{t(1 - t^2/2 + (t^2)) - (t - t^3/6 + (t^3))}{t^2 + (t^2)} = \frac{-t^3/3 + (t^3)}{t^2 + (t^2))},$$

donc $g(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$. Ainsi prolongée, par la valeur 0, la fonction g est continue en 0, et elle l'est clairement sur $]\,0\,;\pi\,[$ par les théorèmes généraux, donc elle est continue sur $[\,0\,;\pi\,[$.

Quant à f, elle est bien définie sur cet intervalle en tant que somme d'une série qui converge simplement (à t fixé, $\frac{2t}{t^2-n^2\pi^2} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc la série converge). Si l'on note $u_n(t) = \frac{2t}{t^2-n^2\pi^2} = \frac{1}{t-n\pi} + \frac{1}{t+n\pi}$ pour $t \in [\,0\,;\pi\,[$ alors u_n est clairement décroissante sur cet intervalle, nulle en 0, donc $\forall n \geqslant 2, \|u_n\|_\infty = \lim\limits_{t\to\pi^-} |u_n(t)| = \frac{2}{(n^2-1)\pi}$, terme général d'une série convergente. Donc $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ converge normalement donc uniformément, donc $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge uniformément. Les fonctions u_n étant continues, leur somme f l'est donc également.

À noter que u_1 n'est pas bornée, on ne peut espérer la convergence normale de $\sum_{n\geqslant 1} u_n$. En revanche cette série converge normalement sur tout segment de $[\,0\,;\pi\,[$.

3)

```
>>> import matplotlib.pyplot as plt
>>> g = lambda t :ma.cos(t)/ma.sin(t) - 1/t
>>> def f(t, n) :
        s = 0
        for k in range(1, n + 1) :
            s+ = 2*t/(t**2 -k**2*(ma.pi)**2)
        return(s)
>>> T = [k*ma.pi/100 for k in range(1, 100)]
```

```
>>> Y = [g(t) for t in T]
>>> Z = [f(t, 10) for t in T]
>>> plt.plot(T, Y)
>>> plt.plot(T,Z)
>>> plt.show()
```

Et les deux tracés sont confondus, même avec seulement 10 termes pour calculer f.

4) Soit $x \in \,]\,0\,;\pi\,[$. La série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge uniformément sur le segment $[\,0\,;x\,]$, on peut donc intégrer terme à terme, et $\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^x u_n$. Or $\int_0^x u_n = \ln(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2})$ et $\int_0^x g = [\ln\frac{\sin t}{t}]_0^x = \ln(\frac{\sin x}{x})$, soit

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right) = \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right).$$

5) Pour $x=1$, l'égalité précédente s'écrit $\lim_{n\to+\infty}\ln u_n = \ln\sin(1)$. Par continuité de l'exponentielle,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \sin(1).$$