Planche 1 :

Exercice 1

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ et de même loi. On suppose que la variable $Z = X + Y + 1$ suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.

1) Déterminer l'espérance de X.

2) Calculer la fonction génératrice de X.

3) Déterminer la loi de X.

Exercice 2

Soient E un espace de dimension finie, p et q dans $\mathscr{L}(E)$ tels que $p + q = \mathrm{Id}$ et $\operatorname{rg} p + \operatorname{rg} q \leqslant \dim E$. Montrer que p et q sont des projecteurs.

Planche 2 :

Soit $f_n \colon x \mapsto -a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k x^k$ avec $a_0 > 0$, $a_1 > 0$ et $a_k \geqslant 0$ pour $k \in \{2, \dots, n\}$.

1) Montrer qu'une telle fonction f_n s'annule une unique fois sur $\mathbb{R}_+^*$. On note u_n son zéro.

2) On pose $g_n \colon x \mapsto -1 + \sum_{k=1}^{n} (k+1) x^k$.

- **a)** Représenter les graphes sur $[0, 1]$ des g_n pour $n \in \{1, \dots, 7\}$. Conjecture sur la suite (u_n) ?
- **b)** Donner une expression simple de g_n et en déduire le résultat.

3) Déterminer la limite de (u_n) pour $a_k = k!$ pour $k \in \mathbb{N}$.

Planche 3 :

Soit $A_n = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout i, $a_{i,i} = 0$ et, pour tout $i \neq j$, $a_{i,j} = j$.

1) Écrire une fonction `M(n)` renvoyant A_n.

2) Écrire une fonction renvoyant les valeurs propres de A_n. Afficher A_n et ses valeurs propres pour n variant de 2 à 10. En déduire une conjecture sur A_n.

3) Montrer que les valeurs propres de A_n vérifient l'équation $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{x+k} = 1$.

4) En déduire que A_n est diagonalisable.

Planche 4 :

Soit $u_n = \prod_{k=0}^{n}(1 - \frac{1}{k^2\pi^2})$.

1) Calculer u_n pour $1 \leqslant n \leqslant 10$ avec un nombre de décimales satisfaisant, puis $\frac{1}{u_{10^n}}$ pour $1 \leqslant n \leqslant 4$. Commenter.

2) Soient f et g définies sur $]0, \pi[$ par $f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2t}{t^2 - n^2\pi^2}$ et $g(t) = \frac{\cos t}{\sin t} - \frac{1}{t}$. Quelle est la limite de g en 0 ? Montrer que f et g sont continues sur $[0, +\infty[$.

3) Représenter graphiquement f et g sur $]0, +\infty[$. On admettra dans la suite l'égalité des deux fonctions.

4) Calculer, pour $x \in]0, +\infty[$, $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \ln(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2})$.
Ind. Calculer de deux façons l'intégrale $\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$.

5) En déduire la limite de (u_n).