PSI* – récolte oraux 2025

4 juillet 2025

Table des matières

Planche 1 (ENS)

Énoncé :

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$.
On définit la variation totale de f sur $[0,1]$ par :

$$V(f) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{0\leqslant t_0\leqslant t_1\leqslant\ldots\leqslant t_n\leqslant 1} \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|$$

On appelle $BV([0,1])$ l'ensemble des fonctions à variation bornée, c'est-à-dire les fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ telles que $V(f) < +\infty$.

1) Montrer que les fonctions monotones et lipschitziennes sont à variation bornée.

2) Les fonctions à variation bornée sont-elles bornées ?

3) Trouver une fonction continue qui n'est pas à variation bornée.

4) Montrer que $(BV, \|\cdot\|)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé avec

$$\|f\| = |f(0)| + V(f)$$

5) Montrer que le produit de deux fonctions à variation bornée est à variation bornée.

6) Soient $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $g : [0,1] \to [0,1]$ deux fonctions à variation bornée.

a) Si g est monotone, montrer que $f \circ g \in BV$.

b) Si f est monotone, $f \circ g \in BV$?

Indications

— Poser $f(x) = x \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$

— Poser $t_0 = 0$, $t_1 = x$

— Utiliser que $f \in BV \Rightarrow f$ est bornée

— $g(t_k)$ est une subdivision, $h \in [0,1]$

Corrigé :

1) **a)** Supposons f croissante (le cas décroissant est analogue). Soit

$$0 \leq t_0 \leq \cdots \leq t_n \leq 1$$

une subdivision. Alors :

$$\sum_{k=1}^{n} |f(t_k) - f(t_{k-1})| = f(t_n) - f(t_0) \leq f(1) - f(0)$$

donc $f \in BV$.

b) Si f est K-lipschitzienne, alors :

$$\sum_{k=1}^{n} |f(t_k) - f(t_{k-1})| \leq K \sum_{k=1}^{n} |t_k - t_{k-1}| \leq K$$

donc $f \in BV$.

2) Oui. Soit f non bornée. Soit $t_0 = 0$.
Soit $M \in \mathbb{R}$ et $t_1 \in [0,1]$ tel que $|f(t_1)| > M + |f(0)|$.
Alors :

$$\sum_{k=1}^{1} |f(t_k) - f(t_{k-1})| = |f(t_1) - f(t_0)| > M$$

donc $f \notin BV$.

3) Soit $f : x \mapsto x \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$ si $x \neq 0$, et $f(0) = 0$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $t_k = \frac{1}{k+1}$. Alors :

$$\sum_{k=1}^{n} |f(t_k) - f(t_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k} \to +\infty$$

et pourtant f est continue sur $[0,1]$. Donc $f \notin BV$.

4) — $0 \in BV$, évident.

— $\lambda f \in BV$ si $f \in BV$, facile.

— Si $f, g \in BV$, alors $f + g \in BV$ avec :

$$V(f+g) \leq V(f) + V(g)$$

Ainsi, BV est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}([0,1], \mathbb{R})$.

— $\|f\| \geq 0$, évident.

— $\|\lambda f\| = |\lambda|.\|f\|$, facile.
— Si $f, g \in BV$, nous avons vu que $V(f+g) \leq V(f) + V(g)$, ce qui implique facilement que $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$.
— Si $\|f\| = 0$, alors $f(0) = V(f) = 0$. Soit $x \in [0,1]$, posons $t_0 = 0, t_1 = x$. Alors :

$$0 \leq \sum_{k=1}^{1} |f(t_k) - f(t_{k-1})| \leq V(f) = 0$$

donc $|f(x) - f(0)| = 0$ et $f(x) = f(0)$. Ainsi f est nulle.

Donc $\|\cdot\|$ est une norme.

5) Soient $f, g \in BV$, M un majorant de $|f|$, et N un majorant de $|g|$.
Alors pour toute subdivision $0 \leq t_0 \leq \cdots \leq t_n \leq 1$, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} |(fg)(t_k) - (fg)(t_{k-1})| &= \sum_{k=1}^{n} |f(t_k)(g(t_k) - g(t_{k-1})) + g(t_{k-1})(f(t_k) - f(t_{k-1}))| \\ &\leq M \sum_{k=1}^{n} |g(t_k) - g(t_{k-1})| + N \sum_{k=1}^{n} |f(t_k) - f(t_{k-1})| \\ &= MV(g) + NV(f)\end{aligned}$$

donc $fg \in BV$.

6) **a)** Dans le cas où g est croissante, si $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n \leq 1$ alors $0 \leq g(t_0) \leq g(t_1) \leq \cdots \leq g(t_n) \leq 1$ donc :

$$\sum_{k=1}^{n} |f(g(t_k)) - f(g(t_{k-1}))| \leq V(f)$$

ainsi $f \circ g \in BV$.
Si g est décroissante, $1 \geq g(t_0) \leq g(t_1) \geq \cdots \geq g(t_n) \geq 0$ mais le raisonnement est le même.

b) Non.
Posons :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } x > \frac{1}{2} \end{cases}, \quad g(x) = \frac{1}{2}\left(1 + x^3 \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)\right)$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $t_k = \frac{1}{k+1}$.
On remarque alors que :

$$f(g(t_k)) = \begin{cases} 0 & \text{si } g(t_k) < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } g(t_k) > \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{donc } |f(g(t_k)) - f(g(t_{k-1}))| = 1.$$

Ainsi :

$$\sum_{k=1}^{n} |f(g(t_k)) - f(g(t_{k-1}))| = \sum_{k=1}^{n} 1 = n \to +\infty \quad \text{quand } n \to \infty$$

Donc $f \circ g \notin BV$.

Planche 2 (CCINP)

Énoncé :
Exercice 1 à préparer en 20 minutes : Soit A dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 - 5A + 6\mathrm{I}_n = 0$.

1) Donner 2 conditions nécessaire et suffisantes de diagonalisabilité pour une matrice carré.

2) Montrer que A est diagonalisable et que ses valeurs propres sont dans $\{2,3\}$. On note D la matrice diagonale associée.

3) Pour M dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $f(M) = MD + DM$.

a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Montrer que f est diagonalisable [*indication :* découper M et D en matrices par blocs].

Exercice 2 passage en 10 min sans préparation :

1) Chercher a, b, c tels que pour tout $t \in \mathbb{R}\backslash\{0, -1, 1\}$, $\dfrac{1}{t(t^2-1)} = \dfrac{a}{t} + \dfrac{b}{t-1} + \dfrac{c}{t+1}$.

2) Résoudre l'équation différentielle $t(t^2-1)y' + 2y = t^2$ sur $]1, +\infty[$ et sur $]0, 1[$.

Corrigé :

Exercice 1 :

1) Question de cours :

— admet une base de vecteurs propres ;

— les sous-espaces propres sont supplémentaires ;

— le polynôme caractéristique est scindé et la multiplicité de chaque valeur propre est égale à la dimension du sous-espace propre associé.

2) Un polynôme annulateur de A est $P = X^2 - 5X + 6 = (X-2)(X-3)$.
Il est scindé à racines simples, donc A est diagonalisable.
Les valeurs propres de A sont parmi les racines de tout polynôme annulateur, donc elles sont dans $\{2, 3\}$.

3) **a)** Si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $MD + DM \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Et si $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$f(M+N) = MD + \lambda ND + DM + \lambda DN = f(M) + \lambda f(N)$$

donc $f \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))$.

b) Si $D = 2\mathrm{I}_n$ ou $3\mathrm{I}_n$, $f = 4\mathrm{id}$ ou $6\mathrm{id}$, donc elle est évidemment diagonalisable.
Sinon il existe $p \in [\![1, n-1]\!]$ et $q = n - p$ tel que $\dim E_2(A) = p$ et $\dim E_3(A) = q$.

Traitons le cas où

$$D = \begin{pmatrix} 2\mathrm{I}_p & 0 \\ 0 & 3\mathrm{I}_q \end{pmatrix}$$

Alors en notant $M = \begin{pmatrix} K & L \\ N & Q \end{pmatrix}$ avec $K \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ et $Q \in \mathscr{M}_q(\mathbb{R})$, nous avons

$$f(M) = \begin{pmatrix} 2K & 3L \\ 2N & 3Q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2K & 2L \\ 3N & 3Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4K & 5L \\ 5N & 6Q \end{pmatrix}$$

Soit $\mathscr{B} = (E_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

— Si $i, j \leqslant p$, $f(E_{ij}) = 4E_{ij}$;

— Si $i \leqslant p < j$ ou $j \leqslant p < i$, $f(E_{ij}) = 5E_{ij}$;

— Si $p < i, j$ alors $f(E_{ij}) = 6E_{ij}$.

C'est une base de vecteurs propres, donc f est diagonalisable.
Dans le cas général, notons $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$,
$I_1 = \{i \in [\![1,n]\!], \lambda_i = 2\}$, $I_2 = \{i \in [\![1,n]\!], \lambda_i = 3\}$
Alors $I_1 \sqcup I_2 = [\![1,n]\!]$.

— Si $i,j \in I_1$, $f(E_{ij}) = 4E_{ij}$ (car $E_{ij}D = 2E_{ij}$ et $DE_{ij} = 2E_{ij}$)
— Si $i,j \in I_2$, $f(E_{ij}) = 6E_{ij}$ (car $E_{ij}D = 3E_{ij}$ et $DE_{ij} = 3E_{ij}$)
— Sinon $f(E_{ij}) = 5E_{ij}$ (car $D = 2$, $E_{ij}D = 2E_{ij}$ et $DE_{ij} = 3E_{ij}$ ou l'inverse)

et la conclusion est la même.

1) Conditions nécessaires et suffisantes de diagonalisabilité :

— Une matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si il existe une base de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de A, c'est-à-dire si A est semblable à une matrice diagonale réelle.
— A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si le polynôme minimal de A est scindé sur $\mathbb{R}$ et que toutes ses racines sont simples (i.e. de multiplicité 1).

2) Étude de la matrice A :
L'équation :
$$A^2 - 5A + 6I_n = 0$$
correspond à une annulation par un polynôme. Posons :
$$P(X) = X^2 - 5X + 6 = (X-2)(X-3)$$
Comme $P(A) = 0$, cela signifie que le polynôme minimal de A divise P. Donc les seules valeurs propres possibles de A sont 2 et 3.
Puisque P est scindé à racines simples et que le polynôme minimal de A divise P, alors A est diagonalisable.
Donc A est diagonalisable et ses valeurs propres sont dans $\{2,3\}$.

3) On considère l'application :
$$f : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \quad f(M) = MD + DM$$

3a) Endomorphisme :
Pour montrer que f est un endomorphisme, on vérifie que f est une application linéaire.
Soient $M_1, M_2 \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,
$$f(M_1+M_2) = (M_1+M_2)D + D(M_1+M_2) = M_1D + M_2D + DM_1 + DM_2 = f(M_1) + f(M_2)$$
$$f(\lambda M_1) = \lambda M_1 D + D(\lambda M_1) = \lambda(M_1D + DM_1) = \lambda f(M_1)$$
Donc f est linéaire, et donc un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

3b) Diagonalisabilité de f :
Soit D une matrice diagonale réelle dont les valeurs propres sont dans $\{2,3\}$. Comme D est diagonale, on peut écrire M sous la forme matricielle bloc :
Supposons que D est de la forme suivante, en regroupant les lignes et colonnes selon les valeurs propres :
$$D = \begin{pmatrix} 2I_p & 0 \\ 0 & 3I_q \end{pmatrix}, \quad \text{avec } p+q=n$$
On découpe alors toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ sous forme bloc compatible :
$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & E \end{pmatrix}, \quad \text{avec } A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R}),\ E \in \mathscr{M}_q(\mathbb{R})$$

Alors :
$$f(M) = MD + DM = \begin{pmatrix} A & B \\ C & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2I_p & 0 \\ 0 & 3I_q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2I_p & 0 \\ 0 & 3I_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & E \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2A & 3B \\ 2C & 3E \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2A & 2B \\ 3C & 3E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4A & 5B \\ 5C & 6E \end{pmatrix}$$
Cette action de f montre que f agit diagonalement sur les sous-espaces formés par les blocs :
- A est multiplié par 4
- B est multiplié par 5
- C est multiplié par 5
- E est multiplié par 6

Ainsi, $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ se décompose en somme directe de sous-espaces stables par f, sur chacun desquels f agit comme une multiplication scalaire. Par conséquent, f est diagonalisable.

Exercice 2 :

1) Après développement et identification on trouve
$$\frac{1}{t(t^2-1)} = -\frac{1}{t} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1} + \frac{1}{t+1}\right).$$

2) Si $I =]1, +\infty[$ et $J =]0, 1[$

Sur I et J :
$$t(t^2-1)y' + 2ty = t \quad \text{équivaut à} \quad y' + \frac{2}{t(t^2-1)}y = \frac{1}{t^2-1}$$
Une primitive de $t \mapsto \dfrac{2}{t(t^2-1)}$ est : $t \mapsto -2\ln|t| + \ln|t-1| + \ln|t+1|$.

Donc l'ensemble des solutions de l'équation homogène sur I est :
$$\left\{ \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ t \mapsto K\dfrac{t^2}{t^2-1} \end{array} \ , \quad K \in \mathbb{R} \right\}$$
De même, sur J on trouve :
$$\left\{ \begin{array}{l} J \to \mathbb{R} \\ t \mapsto K\dfrac{t^2}{t^2-1} \end{array} \ , \quad K \in \mathbb{R} \right\}.$$
Sur I et J, on trouve une solution particulière avec la même méthode et les mêmes calculs.

Soit $y \in \mathscr{C}^1(I \text{ ou } J)$, il existe $K \in \mathscr{C}^1(I \text{ ou } J)$ tel que :
$$y : t \mapsto K(t) \cdot \frac{t^2}{t^2-1}$$
Alors y est solution de (E) sur I ou J ssi :
$$\forall t \in I \text{ ou } J, \quad K'(t) \cdot \frac{t^2}{t^2-1} = \frac{t}{t^2-1}$$
ssi :
$$\forall t \in I \text{ ou } J, \quad K'(t) = \frac{1}{t}$$
Donc :
$$t \mapsto \ln(t) \cdot \frac{t^2}{t^2-1}$$

est une solution particulière.

Finalement, l'ensemble des solutions de (E) est :

$$\left\{ \begin{array}{l} I \text{ ou } J \to \mathbb{R} \\ t \mapsto (K + \ln(t)) \cdot \dfrac{t^2}{t^2-1} \end{array} \quad , \quad K \in \mathbb{R} \right\}$$

Planche 3 (Centrale 1)

Énoncé :

Soit

$$\forall (x,y) \in [-1,1]^2,\ \varphi(x,y) = \int_{-1}^{1} |t-x| \times |t-y| \,\mathrm{d}t$$

1) Montrer que φ est continue sur $[-1,1]^2$.

2) Montrer que φ admet un minimum.

3) On pose $T = \{(x,y) \in [-1,1]^2, -1 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1\}$. Monter que sur T, $\varphi(x,y) = \dfrac{1}{3}(y-x)^3 + \dfrac{2}{3} + 2xy$.

4) Montrer que φ admet un minimum sur T, et qu'il est atteint à l'intérieur de T.

5) Conclure sur le minimum de φ.

Corrigé :

1)
- $\forall x \in [-1,1]$, $t \mapsto |t-x|$ et $t \mapsto |t-y|$ sont continues sur $[-1,1]$.
- $\forall x, y \in [-1,1]$, $t \mapsto |t-x||t-y|$ est continue sur $[-1,1]$.
- $\forall x, y \in [-1,1]$, $|t-x||t-y| \leqslant 4$, qui est intégrable sur $[-1,1]$.

Par théorème de convergence dominée, φ est continue selon les deux variables, donc elle est continue sur $[-1,1]^2$.

De plus, comme produit de segments, $[-1,1]^2$ est fermé et borné dans $\mathbb{R}^2$ qui est de dimension finie. Donc, grâce au théorème des bornes atteintes, φ admet un minimum sur $[-1,1]^2$.

2) Soit $(x_n, y_n) \in T^{\mathbb{N}}$ convergeant vers $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Donc $x_n \to x$, $y_n \to y$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $-1 \leqslant x_n, y_n \leqslant 1$, par passage à la limite, $-1 \leqslant x, y \leqslant 1$, donc $(x,y) \in T$ et donc T est fermé. De plus, il est facilement borné, donc φ admet un minimum sur T.

3) Soit $(x,y) \in T$.

Alors :

$$\begin{aligned} \varphi(x,y) &= \int_{-1}^{x} |t-x||t-y| \,dt + \int_{x}^{y} |t-x||t-y| \,dt + \int_{y}^{1} |t-x||t-y| \,dt \\ &= \int_{-1}^{x} (x-t)(y-t) \,dt + \int_{x}^{y} (t-x)(y-t) \,dt + \int_{y}^{1} (t-x)(t-y) \,dt \end{aligned}$$

Soit $f(t) = (x-t)(y-t)$ et $F(t) = \frac{1}{3}t^3 - \frac{x+y}{2}t^2 + xyt$,
alors $F' = f$.

Et

$$\varphi(x,y) = F(x) - F(-1) - F(y) + F(x) + F(1) - F(y)$$

$$= 2F(x) - 2F(y) = F(x) - F(1)$$

$$= \frac{1}{3}x^3 - xy^2 - \frac{1}{3}x^3 + x^2y + \frac{2}{3} + 2xy$$

$$= \frac{1}{3}(y-x)^3 + \frac{2}{3} + 2xy$$

En particulier $\varphi \in \mathscr{C}^2(T)$.

4)

$$\nabla\varphi(x,y) = \begin{pmatrix} -(y-x)^2 + 2y \\ (y-x)^2 + 2x \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \nabla\varphi(x,y) = 0$$

ssi :

$$\begin{cases} (y-x)^2 + 2x = 0 \\ y + x = 0 \end{cases} \quad \text{ssi} \quad \begin{cases} y = -x \\ 4x^2 + 2x = 0 \end{cases} \quad \text{ssi} \quad x = 0 \text{ ou } x = -\frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}$$

Mais $(0,0) \notin T$ donc le seul point critique est en $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$$\varphi\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}, \quad H_\varphi\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} \end{pmatrix} \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = I_2$$

Donc φ admet un minimum local en $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = A$.
Si φ admettait une valeur strictement inférieure en un point B du bord de T, alors $\varphi|_{[AB]}$ admettrait un maximum sur $[AB]$ et le gradient s'y annulerait, ce qui est absurde. Donc le minimum de φ sur T est atteint en $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et vaut $\frac{1}{2}$.
Si $T' = [-1,1]^2 \setminus T$, on a $\forall (x,y) \in T$, $(y,x) \in T'$ et $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$, donc sur tout $[-1,1]^2$, le minimum de φ vaut $\frac{1}{2}$ et est atteint en $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et en $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

Planche 4 (Centrale 1)

Énoncé :
Soit (E) : $y'' + f(x)y = 0$, où f est réelle, continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

1) Soit y une solutions bornée de (E). Montrer que fy est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

2) Toujours en supposant que y est bornée, montrer l'existence de la limite de y' en $+\infty$, et donner sa valeur.

3) Soit g : $x \mapsto y_1'(x)y_2(x) - y_2'(x)y_1(x)$, où y_1 et y_2 sont des solutions bornées de (E).
Montrer que g est constante et donner sa valeur.

4) Montrer que (E) admet des solutions non bornées.

Corrigé :

1) Immédiat car f est intégrable et continue, et y est bornée et continue.

2) Grâce à la question précédente, si $x \in \mathbb{R}_+$, $\displaystyle\int_0^x y'' + \int_0^x fy = 0$ donc $y'(x) = y'(0) - \displaystyle\int_0^x fy$, qui a une limite finie en $+\infty$. Noton la ℓ. Si $\ell > 0$, alors pour x assez grand, $y'(x) \geqslant \dfrac{\ell}{2}$ donc grâce à l'IAF, $y \to +\infty$, ce qui est absurde. Idem si $\ell < 0$. Donc $y' \to 0$.

3) g est dérivable et

$$\begin{aligned} g'(x) &= y_1''(x)y_2(x) + y_1'(x)y_2'(x) - y_2''(x)y_1(x) - y_2'(x)y_1'(x) \\ &= -f(x)y_1(x)y_2(x) + y_1(x)f(x)y_2(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc g est constante. Or grâce à la question précédente, $g \to 0$ en $+\infty$, donc $g = 0$.

4) L'ensemble F des solutions de (E) est un sev de dimension 2. Notons (y_1, y_2) une base de F. Si y_1 et y_2 sont toutes les deux bornées, toutes les solutions de (E) le sont aussi. Supposons que c'est le cas. Alors avec la question précédente, $g = 0$, c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = 0$.
Hors-programme en PSI : ce déterminant s'appelle le *wronskien* et il ne peut pas être constant égal à zéro. Donc (E) admet des solutions non bornées.

Planche 5 (CCINP)

Énoncé :
Exercice 1 à préparer en 30 minutes : Soit u un endomorphisme non nul de $\mathbb{R}^3$ tel que :

$$u^3 = -u.$$

1) Montrer que $\mathrm{Im}(u^2 + \mathrm{Id}) \subset \mathrm{Ker}(u)$.

2) Montrer que $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u^2 + \mathrm{Id})$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

3) Montrer que 0 est la seule valeur propre réelle de u. En déduire que $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u^2 + \mathrm{Id})$ ne sont pas réduits au singleton $\{0\}$.

4) Montrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice de u est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 donné à l'oral sans préparation :

1) Montrer l'existence de l'intégrale

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{\mathrm{e}^{x} - 1}\, dx.$$

2) Montrer que :

$$J = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^3}.$$

Corrigé :
Exercice 1 :

1) Posons $v = u^2 + \mathrm{id}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^3$,

$$u(v(x)) = u(u^2(x) + x) = u^3(x) + u(x) = -u(x) + u(x) = 0.$$

Donc $u \circ v = 0$, ce qui implique :

$$\mathrm{Im}(u^2 + \mathrm{id}) \subset \mathrm{Ker}(u).$$

2) On a $\mathrm{Im}(u^2+\mathrm{id}) \subset \mathrm{Ker}(u)$. Soit $E = \mathbb{R}^3$.
Notons $a = \dim(\mathrm{Ker}(u))$, $b = \dim(\mathrm{Ker}(u^2+\mathrm{id}))$. On a :

$$\dim(\mathrm{Im}(u^2+\mathrm{id})) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(u)) \text{ donc } 3-b \leqslant a \text{ donc } a+b \geqslant 3.$$

Par ailleurs, si $x \in \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}(u^2+\mathrm{id})$, alors $u(x) = 0$ et $u^2(x) = -x$ donc $0 = -x$, donc $x = 0$.
L'intersection est réduite à 0.
Donc $\mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Ker}(u^2+\mathrm{id}) = \mathbb{R}^3$, ce sont des sous-espaces supplémentaires.

3) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre réelle de u, avec $u(v) = \lambda v$, $v \neq 0$. Alors :

$$u^3(v) = \lambda^3 v = -\lambda v \text{ donc } \lambda^3 + \lambda = 0 \text{ donc } \lambda(\lambda^2+1) = 0.$$

Donc $\lambda = 0$ est la seule valeur propre réelle. Ainsi $\mathrm{Ker}(u)$ n'est pas réduit à 0. De plus $u \neq 0$ donc $\mathrm{Ker}(u) \neq \mathbb{R}^3$, et comme $\mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Ker}(u^2+\mathrm{id}) = \mathbb{R}^3$, $\mathrm{Ker}(u^2+\mathrm{id})$ ne peut être réduit à $\{0\}$.

4) Nous avons $a \geqslant 1$, $b \geqslant 1$ et $a+b = 3$, donc $a = 1$ et $b = 2$ ou l'inverse.
Soit $v_2 \in \mathrm{Ker}(u^2+\mathrm{id})$ non nul. Posons $v_3 = u(v_2)$. Alors $u(v_3) = u^2(v_2) = -v_2$. Ainsi $v_3 \neq 0$. Si (v_2, v_3) est liée, cela signifie que v_2 est un vecteur propre de u. Mais alors la valeur propre associée est nulle et $v_3 = 0$: c'est absurde. Donc (v_2, v_3) est libre et $b = 2$. Alors $a = 1$, et si v_1 est un vecteur directeur de $\mathrm{Ker}(u)$, $(v_1, v_2 v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
Alors, dans cette base, la matrice de u est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 :

1) Étudions le comportement de f près de 0 et à l'infini :
(i) Près de 0 : on utilise l'équivalent $\mathrm{e}^x - 1 \sim x$, donc $\frac{x^2}{\mathrm{e}^x-1} \sim x$ quand $x \to 0^+$.
Donc f, et est intégrable au voisinage de 0.
(ii) Quand $x \to +\infty$: on a $\mathrm{e}^x - 1 \sim \mathrm{e}^x$, donc :

$$f(x) \sim \frac{x^2}{\mathrm{e}^x} \quad \text{quand } x \to +\infty.$$

Et $\frac{x^2}{\mathrm{e}^x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$, donc est intégrable à l'infini.
De plus f est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc elle y est intégrable, et J est bien définie.

2) On utilise l'identité classique de la somme sur les séries géométriques (valide pour $x > 0$) :

$$\frac{1}{\mathrm{e}^x - 1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx}.$$

On insère cette expression dans l'intégrale :

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{\mathrm{e}^x - 1}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x.$$

Pour inverser somme et intégrale, il reste à vérifier que si $v_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x \geq 0$, alors $\sum v_n$ converge.
On effectue le changement de variable $u = nx$:

$$\int_0^{+\infty} x^2 \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n^3}\int_0^{+\infty} u^2 \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u.$$

Mais :

$$\int_0^{+\infty} u^2 \mathrm{e}^{-u}\, \mathrm{d}u = 2 \text{ après deux IPP,}$$

donc :

$$\int_0^{+\infty} x^2 \mathrm{e}^{-nx}\, \mathrm{d}x = \frac{2}{n^3},$$

qui est le terme général d'une série convergente. Nous pouvons donc inverser somme et intégrale et finalement :

$$J = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^3}.$$

Planche 6 (Centrale 1)

Énoncé :

On définit, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la suite $\left(\binom{\alpha}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\binom{\alpha}{n} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} & \text{si } n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

On pose :

$$b_n = \int_0^1 \binom{t}{n}\, \mathrm{d}t.$$

1) Montrer que pour tout $t \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\left|\binom{t}{n}\right| \leqslant 1.$$

2) Étudier la convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{t}{n} x^n$, pour $t \in [0,1]$, et $x \in]-1,1[$.

3) Montrer que pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \frac{x}{\ln(1+x)}.$$

4) On peut définir :

$$f : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n.$$

Montrer que :

$$f(x-1) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{-1}{\ln(x)}.$$

5) La fonction f est-elle définie en -1 ? Est-elle dérivable en -1 ?

6) En déduire une valeur du rayon de convergence de f.

Corrigé :

1) Le résultat est évident pour $n = 0$.

Sinon, pour $t \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\left|\binom{t}{n}\right| = \left|\frac{t(t-1)\cdots(t-n+1)}{n!}\right|.$$

Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $t-k \in [-k, 1]$, donc $|t-k| \leqslant k+1$. Par produit, $|t(t-1)\cdots(t-n+1)| \leqslant n!$ donc :

$$\left|\binom{t}{n}\right| \leqslant \frac{n!}{n!} \leqslant 1.$$

2) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on sait que :

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \quad \text{pour } |x| < 1.$$

On peut aussi remarquer que $\left|\frac{\binom{t}{n}}{\binom{t}{n+1}}\right| = \frac{|t-n|}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, donc avec le critère de d'Alembert on retrouve la convergence pour $x \in]-1, 1[$.

3) On considère :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 x^n \binom{t}{n} \, \mathrm{d}t.$$

Or $\displaystyle\int_0^1 \left|x^n \binom{t}{n}\right| \, \mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 |x^n| \, \mathrm{d}t = |x^n|$ et $\sum |x_n|$ converge. Il est donc possible d'inverser somme et intégrale :

$$f(x) = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{t}{n} x^n \, \mathrm{d}t = \int_0^1 (1+x)^t \, \mathrm{d}t.$$

On effectue le calcul :

$$f(x) = \int_0^1 (1+x)^t \, \mathrm{d}t = \left[\frac{(1+x)^t}{\ln(1+x)}\right]_{t=0}^1 = \frac{(1+x)^1 - (1+x)^0}{\ln(1+x)} = \frac{(1+x)-1}{\ln(1+x)} = \frac{x}{\ln(1+x)}.$$

Finalement :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = \frac{x}{\ln(1+x)}.$$

4) On a :

$$f(x-1) = \frac{x-1}{\ln x} \sim \frac{-1}{\ln x} \quad \text{quand } x \to 0^+.$$

5) On étudie la limite de $f(x)$ lorsque $x \to -1^+$:

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{x}{\ln(1+x)}.$$

Posons $x = -1 + h$ avec $h \to 0^+$. Alors :

$$f(x) = \frac{-1+h}{\ln(h)} \sim \frac{-1}{\ln(h)} \to 0.$$

La fonction f admet donc une limite finie en $x = -1$:

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = 0.$$

Ainsi, f est prolongeable par continuité en $x = -1$ en posant $f(-1) = 0$. On continuera de nommer f ce prolongement.
On calcule la dérivée de f sur $]-1, 1[$:

$$f'(x) = \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{x}{(1+x)\ln^2(1+x)}.$$

Alors

$$\lim_{x \to -1^+} f'(x) = +\infty.$$

D'après le théorème de la limite de la dérivée (f étant continue en -1), f n'est pas dérivable en -1.

6) Soit R le rayon de convergence de f. Grâce à la question **2)**, $R \geqslant 1$. Mais si $R > 1$, alors f serait dérivable en -1, ce qui est absurde. Donc $R = 1$.

Planche 7 (CCINP)

Énoncé (à préparer en 30 minutes, le 2nd exercice est le même que celui de la planche 2) :
Soit $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que :

$$MM^\top = M^\top M \quad \text{et} \quad M^2 + 2\mathrm{I}_2 = 0.$$

1) Montrer que $M^\top M$ est diagonalisable.

2) Trouver les valeurs propres de $M^\top M$.

3) Montrer que $\frac{1}{\sqrt{2}}M$ est orthogonale.

4) Trouver toutes les matrices M qui vérifient ces conditions.

Corrigé :

1) On remarque que $M^\top M$ est symétrique car :

$$(M^\top M)^\top = M^\top (M^\top)^\top = M^\top M.$$

Une matrice réelle symétrique est toujours diagonalisable dans une base orthonormée. Donc :

$$\boxed{M^\top M \text{ est diagonalisable}}.$$

2) Utilisons la condition $M^2 = -2\mathrm{I}_2$. Cela implique que M est inversible et que :

$$M^{-1} = -\frac{1}{2}M.$$

Posons $A = M^\top M$. Nous savons déjà qu'elle est symétrique, et il est facile et classique de montrer qu'elle est positive. De plus, puisque M est inversible, A est aussi inversible et donc elle est symétrique définie positive. Elle est doonc diagonalisable à valeurs propres strictement positives.

Enfin $A^2 = M^\top M M^\top M = M^\top M^2 M^\top = -2(M^2)^\top = 4\mathrm{I}_2$. Donc les valeurs propres de A sont parmi mes racines de $X^2 - 4$, donc ± 2. Mais d'après la remarque précédente, seule 2 est racine de A, et donc

$$\boxed{A = 2\mathrm{I}_2}.$$

3) Soit $Q = \dfrac{1}{\sqrt{2}} M$. Alors :

$$Q^T Q = \frac{1}{\sqrt{2}} M^\top \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} M = \frac{1}{2} M^\top M.$$

D'après la question précédente, $M^\top M = 2\mathrm{I}_2$, donc :

$$Q^T Q = \frac{1}{2} \cdot 2\mathrm{I}_2 = \mathrm{I}_2.$$

Donc :

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}} M \text{ est orthogonale}}.$$

4) Effectuons la synthèse. Soit M une solution. Posons $Q = \dfrac{1}{\sqrt{2}} M$. Alors Q est orthogonale. Si elle est indirecte, le cours assure que c'est une symétrie orthogonale, donc $Q^2 = \mathrm{I}_2$, donc $M^2 = 2\mathrm{I}_2$: c'est absurde, donc Q est directe. C'est donc la rotation d'un certain angle θ. Alors Q^2 est la rotation d'angle 2θ, donc $22\theta \equiv \pi\ [2\pi]$ et $\theta \equiv \pi/2\ [\pi]$, donc $Q = \pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, et donc finalement l'ensemble des solutions est constitué des deux matrices

$$\boxed{\pm\sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}.$$

Planche 8 (Centrale 1)

Énoncé :

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Nous posons $D = \{z \in \mathbb{C},\ |z| \leq 1\}$ et $f\ : D \mapsto \mathbb{C},\ z \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 1$. Enfin nous supposons que f est injective.

1) Montrer que si $f(z) \in \mathbb{R}$, alors $z \in \mathbb{R}$

2) Soit $g\ :\ \begin{array}{ccc} [0, \pi] & \to & \mathbb{R} \\ \theta & \mapsto & \mathrm{Im}\left(f\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)\right) \end{array}$.

Montrer que g ne change pas de signe.

3) Non donnée.

Corrigé :

1) Soit $z \in D$ tel que $f(z) \in \mathbb{R}$.

On sait que tous les coefficients a_n sont réels, donc :

$$\overline{f(z)} = \overline{\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \overline{z}^n = f(\overline{z})$$

Mais si $f(z) \in \mathbb{R}$, alors $\overline{f(z)} = f(z)$. Donc $f(\overline{z}) = f(z)$.
Par injectivité de f, on en déduit que $\overline{z} = z$ donc $z \in \mathbb{R}$.

2) On a $f(\mathrm{e}^{i\theta}) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \mathrm{e}^{in\theta}$, donc :

$$g(\theta) = \operatorname{Im}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \mathrm{e}^{in\theta}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin(n\theta)$$

$\theta \mapsto a_n \mathrm{e}^{in\theta}$ est continue et puisque $R > 1$, la série de fonctions $\theta \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \mathrm{e}^{in\theta}$ converge normalement sur $[0, \pi]$, donc elle est continue. Par continuité de $z \mapsto \operatorname{Im}(z)$, la fonction g est continue sur $[0, \pi]$.

Supposons par l'absurde que g change de signe. Alors il existe $\theta_1, \theta_2 \in [0, \pi]$ tels que :

$$g(\theta_1) > 0 \quad \text{et} \quad g(\theta_2) < 0$$

Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe alors $\theta_0 \in (\theta_1, \theta_2)$ tel que :

$$g(\theta_0) = 0 \text{ donc } \operatorname{Im}\left(f\left(\mathrm{e}^{i\theta_0}\right)\right) = 0 \text{ donc } f\left(\mathrm{e}^{i\theta_0}\right) \in \mathbb{R}$$

Mais d'après la question 1, si $f(z) \in \mathbb{R}$, alors $z \in \mathbb{R}$. Or $\mathrm{e}^{i\theta_0} \notin \mathbb{R}$ pour $\theta_0 \in]0, \pi[$. C'est une contradiction.

Donc g ne change pas de signe sur $[0, \pi]$.

Planche 9 (Centrale 1)

Énoncé :
On définit $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^2$:

$$\|(x, y)\|_\infty = \max(|x|, |y|)$$

On définit :

$$\mathscr{B}(0,1) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x, y)\|_\infty < 1\right\}$$

$$\overline{\mathscr{B}}(0,1) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x, y)\|_\infty \leqslant 1\right\}$$

On pose f :

$$\begin{aligned} f : \overline{\mathscr{B}}(0,1) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto -\left(x^2 + y^2\right)^2 + \frac{3}{2}\left(x^2 + y^2\right) + 1 \end{aligned}$$

1) Représenter $\mathscr{B}(0,1)$ et $\overline{\mathscr{B}}(0,1)$ comme produit cartésien d'ensembles de $\mathbb{R}$.

2) Justifiez que $f \in \mathscr{C}^1(\overline{\mathscr{B}}(0,1))$. Déterminer le gradient de f pour (x, y) appartenant à $\overline{\mathscr{B}}(0,1)$, et les points critiques de f.

3) On définit la surface S par :

$$S = \left\{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in \overline{\mathscr{B}}(0,1)\right\}$$

Déterminez tous les points (a, b) de $\overline{\mathscr{B}}(0,1)$ tels que le plan tangent à S en $(a, b, f(a, b))$ est orthogonal au vecteur directeur $(0, -1, 1)$.

4) Déterminer les extrema de f.

Corrigé :

1) On a :
$$\|(x,y)\|_\infty = \max(|x|,|y|) < 1 \iff |x| < 1 \text{ et } |y| < 1$$
Donc :
$$\mathscr{B}(0,1) =]-1,1[\times]-1,1[$$
et de même :
$$\overline{\mathscr{B}}(0,1) = [-1,1]\times[-1,1]$$

2) La fonction $f(x,y) = -\left(x^2+y^2\right)^2 + \frac{3}{2}\left(x^2+y^2\right) + 1$ est polynomiale donc elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ et en particulier sur $\mathscr{B}(0,1)$.
Calculons le gradient :
$$\frac{\partial f}{\partial x} = -4x(x^2+y^2) + 3x$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -4y(x^2+y^2) + 3y$$
Donc :
$$\nabla f(x,y) = \Big(-4x(x^2+y^2)+3x, -4y(x^2+y^2)+3y\Big)$$
Les points critiques sont les points où $\nabla f(x,y) = (0,0)$, ce qui se produit lorsque :
$$[x = 0 \text{ et } y = 0] \quad \text{ou} \quad \Big[-4(x^2+y^2)+3 = 0\Big].$$
Dans le second cas, on a :
$$x^2+y^2 = \frac{3}{4}$$
Donc les points critiques sont :
- $(0,0)$
- Tous les points du cercle de rayon $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et de centre 0, qui est bien contenu dans $\mathscr{B}(0,1)$.

3) Soit $(a,b) \in \overline{\mathscr{B}}(0,1)$. Le plan tangent à S en $(a,b,f(a,b))$ est donné par :
$$z = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$$
On cherche $(a,b) \in \overline{\mathscr{B}}(0,1)$ tel que ce plan ait pour vecteur normal un vecteur colinéaire à $(0,-1,1)$.
Un vecteur normal au plan tangent est :
$$n = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b), -1\right)$$
On obtient donc le système :
$$\exists\,\lambda\in\mathbb{R},\ \begin{cases} -4a^3 - 4b^2x \quad +3a = 0 \\ -4b^3 - 4a^2y \quad +3b = -\lambda \\ \qquad\qquad\qquad 1 = \lambda \end{cases}$$

soit

$$\exists\, \lambda \in \mathbb{R},\ \begin{cases} 4a\left(-a^2 - b^2 + \dfrac{3}{4}\right) = 0 \\ 4b\left(-a^2 - b^2 + \dfrac{3}{4}\right) = -\lambda \\ \lambda = 1 \end{cases}$$

i.e.

$$\begin{cases} 4a\left(-a^2 - b^2 + \dfrac{3}{4}\right) = 0 \\ 4b\left(-a^2 - b^2 + \dfrac{3}{4}\right) = -1 \end{cases}$$

ou encore

$$[a = 0] \quad \text{et} \quad \left[0 = 4b^3 - 3b - 1 = (b-1)(4b^2 + 4b + 1) = (b-1)(2b+1)^2\right]$$

Finalement les solutions sont : $(0, 1)$ et $(0, -1/2)$.

4) Posons

$$g(t) = -t^2 + \frac{3}{2}t + 1.$$

Alors

$$f(x, y) = g(x^2 + y^2).$$

De plus, si $(x, y) \in \overline{\mathscr{B}}(0, 1)$, $x^2 + y^2 \in [0, 2]$. Nous allons donc étudier g sur $[0, 2]$. Une étude de fonction classique et sans difficulté assure que g est strictement croissante sur $[0, 3/4]$ et strictement décroissante sur $[3/4, 2]$, qu'elle atteint son maximum valant $(5/4)^2$ en $3/4$, et son minimum valant 0 en 2.

f atteint donc son maximum valant $(5/4)^2$ sur le cercle de centre 0 et de rayon $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (ce qui est cohérent avec le résultat de la seconde question), et son minimum valant 0 en les quatre coins $(\pm 1, \pm 1)$ du carré $\overline{\mathscr{B}}(0, 1)$ (ce qui est là aussi cohérent : ce ne sont pas des points critiques mais ils sont sur le bord du domaine).

Planche 10 (Mines-Ponts)

Énoncé :

Exercice 1 : Soient $M \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que A soit antisymétrique.

1) Montrer que $A - \mathrm{I}_n$ est inversible.

2) On pose $M = (A - \mathrm{I}_n)^{-1}(A + \mathrm{I}_n)$. Montrer que $M \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

3) Est-ce que $M \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$?

Exercice 2 : On pose $u_n : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x}{x^2 + n^2} \end{array}$ et $S : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \end{array}$.

1) S est-elle bien définie sur $\mathbb{R}$?

2) S converge t-elle normalement ?

3) Montrer que S est de classe $\mathscr{C}^1$.

4) Donner un équivalent de S en 0.

5) Calculer la limite de S en $+\infty$.

6) S converge t-elle uniformément ?

Corrigé :
Exercice 1 :

1) Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ une valeur propre de A. Comme A est antisymétrique, on a $A^\top = -A$. Soit $X \in \mathbb{C}^n$ tel que $AX = \lambda X$, avec $X \neq 0$ et $X = (x_1, \ldots, x_n)$. On a :

$$\bar{X}^\top AX = \lambda \bar{X}^\top X$$

et aussi

$$\bar{X}^\top AX = \bar{X}^\top \bar{A}X = (\overline{AT})^\top X = \bar{\lambda}\bar{X}^\top X$$

On en déduit que $(\lambda + \bar{\lambda})\bar{X}^\top X = 0$. Or $\bar{X}^\top X = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 > 0$ car $X \neq 0$.

Ainsi $\lambda + \bar{\lambda} = 0$ et $\lambda \notin \mathbb{R}$. Alors 1 n'est pas valeur propre de A, et donc

$$\boxed{A - \mathrm{I}_n \text{ est inversible.}}$$

2)

$$M^\top = \left[(A - \mathrm{I}_n)^{-1}(A + \mathrm{I}_n)\right]^\top = (A + \mathrm{I}_n)^\top \left[(A - \mathrm{I}_n)^{-1}\right]^\top = (A^\top + \mathrm{I}_n)\left[(A^\top - \mathrm{I}_n)^{-1}\right]$$

Or $A^\top = -A$, donc :

$$M^\top = (-A + \mathrm{I}_n)(-A - \mathrm{I}_n)^{-1}$$

On en déduit :

$$M^\top M = (-A + \mathrm{I}_n)(-A - \mathrm{I}_n)^{-1} \cdot (A - \mathrm{I}_n)^{-1}(A + \mathrm{I}_n)$$

Remarquons que :

$$(-A - \mathrm{I}_n)^{-1} = -(A + \mathrm{I}_n)^{-1}, \quad (A - \mathrm{I}_n)^{-1} = -(-A + \mathrm{I}_n)^{-1}$$

D'où :

$$M^\top M = (\mathrm{I}_n - A)(A + \mathrm{I}_n)^{-1}(-A + \mathrm{I}_n)^{-1}(A + \mathrm{I}_n)$$

Mais les polynômes en A, ainsi que leurs inverses, commutent, donc

$$M^\top M = (\mathrm{I}_n - A)(-A + \mathrm{I}_n)^{-1} \cdot (A + \mathrm{I}_n)^{-1}(A + \mathrm{I}_n) = \mathrm{I}_n$$

Ainsi

$$\boxed{M \text{ est orthogonale.}}$$

3) De plus :

$$\begin{aligned}
\det M &= \frac{\det(A + \mathrm{I}_n)}{\det(A - \mathrm{I}_n)} = \frac{\det(A + \mathrm{I}_n)}{\det(A - \mathrm{I}_n)^\top} \\
&= \frac{\det(A + \mathrm{I}_n)}{\det(-A - \mathrm{I}_n)} = \frac{\det(A + \mathrm{I}_n)}{(-1)^n \det(A + \mathrm{I}_n)} \\
&= (-1)^n
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{M \in \mathrm{SO}_m(\mathbb{R}) \text{ si et seulement si } n \text{ est pair.}}$$

Exercice 2 :

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, l'expression $u_n(x) = \dfrac{x}{x^2+n^2}$ est bien définie, et on a :

$$|u_n(x)| = \left|\frac{x}{x^2+n^2}\right| \leqslant \frac{|x|}{n^2}$$

et comme $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, la série converge absolument pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{S \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}.}$$

2) Une étude des variations de u_n sur $\mathbb{R}_+$ (ce qui est suffisant car u_n est impair), assure que u_n est croissante sur $[0, n]$ est décroissante sur $[n, +\infty[$. Elle vaut 0 en 0 et tend vers 0 en $+\infty$, donc $|u_n|$ atteint son maximum en n, et ce maximum vaut $\dfrac{1}{2n}$. Ce n'est pas le terme géngéral d'une série convergente, donc

$$\boxed{\sum u_n \text{ ne converge pas normalement sur } \mathbb{R}.}$$

Par contre, si $K = [-A, A]$ est un compact de $\mathbb{R}$, alors pour tout $x \in K$, on a :

$$|u_n(x)| \leqslant \frac{A}{n^2}$$

La série de référence $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A}{n^2}$ converge. Finalement

$$\boxed{\sum u_n \text{ convergence normalement sur tout compact de } \mathbb{R}.}$$

3) Chaque u_n est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et la dérivée est donnée par :

$$u_n'(x) = \frac{n^2 - x^2}{(x^2+n^2)^2}$$

Sur un compact $[-A, A]$, on majore :

$$|u_n'(x)| \leqslant \frac{n^2 + A^2}{n^4} = \frac{1}{n^2} + \frac{A^2}{n^4}$$

Cette majoration indépendante de $x \in [-A, A]$ est le terme général d'une série convergente, donc la série $\sum u_n'$ converge normalement. Par théorème de dérivation terme à terme,

$$\boxed{S \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}).}$$

4) On remarque que $S(x) = xT(x)$ avec $T(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2+n^2}$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, $\left|\dfrac{1}{x^2+n^2}\right| \leq \dfrac{1}{n^2}$ T converge normalement sur $\mathbb{R}$. De plus $\dfrac{1}{x^2+n^2} \xrightarrow[x\to 0]{} \dfrac{1}{n^2}$, donc grâce au théorème de la double limite, $T(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et donc

$$\boxed{S(x) \underset{x\to 0}{\sim} x\frac{\pi^2}{6}.}$$

5) Une comparaison série-intégrale assure que pour $x > 0$,

$$\int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{x^2+t^2} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x^2+k^2} \leq \int_0^n \frac{\mathrm{d}t}{x^2+t^2},$$

donc

$$\frac{1}{x}\left(\arctan\left(\frac{n+1}{x}\right) - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x^2+k^2} \leq \frac{1}{x}\arctan\left(\frac{n}{x}\right).$$

En faisant tendre n vers $+\infty$ et en mulitpliant par x il vient

$$\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \leq S(x) \leq \frac{\pi}{2}$$

donc par encadrement

$$\boxed{S(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}.}$$

6) Si S convergeait uniformément sur $\mathbb{R}$, on pourrait utiliser le théorème de la double limite : $u_n(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ donc $S(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. C'est absurde, donc

$$\boxed{S \text{ ne converge pas uniformément sur } \mathbb{R}\text{, seulement sur tout compact.}}$$