Planche 1 :

Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. On pose $S(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P(k)}{k!}$.

1) **a)** Montrer que $S(P)$ est bien défini.

b) Montrer que S est une forme linéaire.

c) Calculer avec Python $\frac{1}{e}\sum_{k=0}^{50} \frac{P(k)}{k!}$ avec $P = X^d$, $d \in \{1, \ldots, 10\}$, puis avec $P = X^9 + 36X^6 - X^3 + X^2 - 3$. Observations ?

2) Soit (H_n) la suite de polynômes définie par $H_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $H_{n+1} = (X - n)H_n$.

a) Montrer que $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$.

b) Calculer $S(H_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) Comment calculer $S(P)$ pour P quelconque ?

On assimile un polynôme $P = \sum_{k=0}^{9} a_k X^k$ à la liste $[a_0, \ldots, a_9]$ de ses coefficients dans la base canonique.

a) Écrire une fonction permettant de calculer les coefficients de H_n pour $1 \leqslant n \leqslant 9$.

b) Donner la valeur exacte de $S(Q)$ pour $Q = X^4 + 2X^3 - X^2 - 2X + 5$.

c) Expliquer les observations de la fin de la première question.

Planche 2 :

Soit $S = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \frac{u_n^2}{n+1}\}$. On désigne par $u_n(x)$ le n-ième terme de la suite de S telle que $u_0 = x$.

1) Écrire une fonction `Suite(n, x)` qui renvoie $u_n(x)$. Tester la fonction pour quelques valeurs. Tracer les premiers termes de la suite pour différentes valeurs de x. Commenter.

2) Tester pour $n = 31$ et $x = 1,6616$, pour $n = 17$ et $x = 1,6617$. Commenter.

3) Montrer l'équivalence des trois assertions suivantes :

(i) $\exists n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leqslant u_n$

(ii) $\exists n \in \mathbb{N}^*,\ u_n < 1$

(iii) (u_n) tend vers 0.

4) Montrer que $\exists N \in \mathbb{N},\ u_N \geqslant N + 2 \Rightarrow \forall n \geqslant N,\ u_n \geqslant n + 2$.

5) Étudier les cas $x = 1$ et $x = 2$. On pose $E_0 = \{x,\ u_n(x) \to 0\}$ et $E_\infty = \{x,\ u_n(x) \to +\infty\}$. Montrer que E_0 et E_∞ sont deux intervalles tels que $\mathbb{R}_+^* = E_0 \cup E_\infty$.

Planche 3 :

On considère, pour $n \geqslant 3$, la matrice

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1) Montrer que A_n est diagonalisable et déterminer son rang.

2) On considère la suite $(u_p = \mathrm{tr}\,(A_3^p))_{p\in\mathbb{N}}$.

- **a)** Calculer les quinze premiers termes de cette suite.
- **b)** Calculer $B = A_3^3 - 3A_3^2 + A_3 + I_3$.
- **c)** Trouver une relation de récurrence simple pour (u_p). Donner un script en Python permettant de trouver u_p.

3)
- **a)** Montrer qu'une valeur propre différente de 1 de A_n est solution de l'équation $f_n(x) = 0$, où $f_n(x) = a_n x + b_n + \frac{c_n}{x-1}$ est à déterminer. On s'intéressera au système $A_n X = \lambda X$.
- **b)** Montrer que les valeurs propres de A_n sont racines du polynôme $P_n(X) = X^3 - 3X^2 + (4-n)X + (n-2)$.

4)
- **a)** Montrer que A_n admet trois valeurs propres distinctes α_n, β_n, γ_n.
- **b)** Montrer que le système

$$\begin{cases} x + \alpha_n y + \alpha_n^2 z = \alpha_n^4 \\ x + \beta_n y + \beta_n^2 z = \beta_n^4 \\ x + \gamma_n y + \gamma_n^2 z = \gamma_n^4 \end{cases}$$

  admet une unique solution (x_n, y_n, z_n).
- **c)** Donner un script en python permettant de résoudre ce système (lorsque n est donné).
- **d)** Quelle vérification matricielle peut-on faire ?

Planche 4 :

Soient $S_1 : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1 + x^{2n})$, $S_2 : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1 + x^{2n-1})$ et $S_3 : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1 - x^{2n-1})$.

1) Déterminer les domaines de définition de S_1, S_2, S_3.

2) Tracer les graphes de sommes partielles pour diverses valeurs de n.

3) Tracer les graphes de sommes partielles de $S_1 + S_2 + S_3$. Conjecture ?

4) Montrer que S_1, S_2, S_3 sont de classe $\mathscr{C}^1$.

5) Montrer la conjecture.