Exercices de préparation aux oraux
À présenter en classe

I. Algèbre

Exercice 1 (★★☆) Soient $A_1, \dots, A_n \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\exists p \in [\![1,n]\!]$, $A_i^p = 0$ et $\forall i,j \in [\![1,n]\!]$, $A_iA_j = A_jA_i$. Montrer que $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} A_i = 0$.
Le résultat est-il encore vrai si l'on ne suppose plus que les A_i sont nilpotentes mais seulement non inversibles ?

Exercice 2 (★☆☆) Soient A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $AB = BA$ et qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $B^p = 0$. Montrer que $\det(A+B) = \det(A)$.

Exercice 3 (★☆☆)

1) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non constant. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $P(M) = 0$.

2) Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré 2 . Montrer qu'il existe $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $Q(M) = 0$.

Exercice 4 (★☆☆) Soit $C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice de rang r.

1) Montrer qu'il existe $P, Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que $C = PJ_rQ$ où $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2) Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AC = CB$. Montrer que A et B possèdent r valeurs propres communes en tenant compte des multiplicités.

3) Que peut-on dire quand $r = n$?

Exercice 5 (★☆☆) Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + A^T = I_n$.

1) Montrer que $A^4 - 2A^2 + A = 0$.

2) Montrer que 1 n'est pas valeur propre de A.

3) Montrer que A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer l'expression des A possibles.

Exercice 6 (★★☆)
Soient $P \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N}^*$ tels que P^n divise $P \circ P$. Montrer que X^n divise P.

Exercice 7 (★☆☆)
Soit $P_n = X^{4n} + X^{3n} + X^{2n} + X^n + 1$.

1) Trouver les racines de P_1.

2) Trouver les entiers n tels que P_1 divise P_n.

Exercice 8 (★★☆)

1) On considère $n+1$ nombres complexes deux à deux distincts $x_0, \dots, x_n$ et $2n+2$ nombres complexes $y_0, y_0', \dots, y_n, y_n'$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $H \in \mathbb{C}_{2n+1}[X]$ vérifiant $\forall k \in \{0, \dots, n\},\ H(x_k) = y_k$ et $H'(x_k) = y_k'$.

2) Trouver les $P \in \mathbb{C}_3[X]$ tels que $P(j) = P'(j^2) = j^2$ et $P(j^2) = P'(j) = j$.

Exercice 9 (★★☆)

Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien, $(x_1, \dots, x_n)$ des vecteurs de E. Montrer que le rang de la matrice $(\langle x_i, x_j\rangle)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est égal au rang de la famille $(x_1, \dots, x_n)$.

Exercice 10 (★★☆)

Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien réel. On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de E converge faiblement vers $x \in E$ si $\forall y \in E,\ \lim_{n\to+\infty}\langle x_n - x, y\rangle = 0$.

1) On suppose que E est de dimension finie. Montrer que (x_n) converge faiblement vers x si et seulement si $\lim_{n\to+\infty} \|x_n - x\| = 0$.

2) Montrer que cette équivalence est fausse en dimension infinie.

Exercice 11 (★★☆)

Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle$ un espace euclidien, F et G deux sous-espaces vectoriels de E, et p et q les projecteurs orthogonaux sur F et G.

1) Montrer que $p \circ q \circ p$ est symétrique.

2) Montrer que E est somme directe orthogonale de $(\operatorname{Im} p + \operatorname{Ker} q)$ et de $(\operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Im} q)$.

3) Montrer que $p \circ q$ est diagonalisable.

Exercice 12 (★★☆)

Soient E un espace euclidien et $u \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que u est 1–lipschitzienne. Montrer que $E = \operatorname{Ker}(u - \mathrm{Id}_E) \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Im}(u - \mathrm{Id}_E)$.
Indication : Pour $x \in \operatorname{Ker}(u-\mathrm{Id}) \cap \operatorname{Im}(u-\mathrm{Id})$, soit y tel que $x = u(y) - y$. Déterminer $u^k(y)$.

Exercice 13 (★☆☆)

Dans $\mathbb{R}^3$ canoniquement euclidien, donner la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur la droite D dirigée par $u = (a, b, c)$, avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, et la matrice de la projection orthogonale sur $D^\perp$.

Exercice 14 (★★★)

1) Trouver les $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et toute matrice $A \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$, $P(A)$ soit antisymétrique.

2) Trouver les $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et toute matrice $O \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, $P(O)$ soit orthogonale.

Exercice 15 (★★☆)

Déterminer les $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotentes et antisymétriques.

II. Analyse

Exercice 16 (★ ☆ ☆) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels positifs et, pour $n \geqslant 1, y_n = \sqrt{x_1 + \sqrt{x_2 + \cdots + \sqrt{x_n}}}$.

1) Étudier la convergence de la suite (y_n) lorsque la suite (x_n) est constante.

2) Étudier la convergence de la suite (y_n) lorsque $x_n = ab^{2^n}$ avec $a > 0$ et $b > 0$.

3) Montrer que la suite (y_n) converge si et seulement si la suite $\left(x_n^{1/2^n}\right)$ est bornée.

Exercice 17 (★ ★ ☆)
Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que $u_n \to \ell \in \mathbb{R}$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n} ku_k$. Montrer que (v_n) converge et exprimer sa limite en fonction de ℓ.

Exercice 18 (★ ★ ☆)
Soit (u_n) définie par $u_0 > 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + u_n^2$.

1) Déterminer la limite éventuelle de (u_n).

2) Montrer que la suite de terme général $2^{-n}\ln(u_n)$ est convergente. On note λ sa limite.

3) Montrer, pour $n \in \mathbb{N}$: $0 < \lambda - \frac{\ln(u_n)}{2^n} < \frac{1}{2^n u_n}$.

4) En déduire qu'il existe $\mu \in]1, +\infty[$ tel que $u_n \sim \mu^{2^n}$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 19 (★ ★ ☆) Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue et surjective. Montrer que tout $y \in \mathbb{R}$ admet une infinité d'antécédents par f.

Exercice 20 (★ ★ ★) Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f \circ f = 2f - \mathrm{id}$.

1) Montrer que f est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

2) On pose $f_0 = f$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1} = f \circ f_n$. Montrer que $\left(\frac{1}{n} f_n\right)$ admet une limite, que l'on précisera.

3) Déterminer f.

Exercice 21 (★ ☆ ☆)
Soit $f \in \mathscr{C}^1([a,b], \mathbb{R})$ telle que $f'(a) = f'(b) = 0$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(c)-f(a)}{c-a}$.

Exercice 22 (★ ★ ☆)

1) Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^*)$. On suppose que $\frac{f'(x)}{f(x)}$ tend vers $\ell < 0$ quand x tend vers $+\infty$. Quelle est la nature de la série de terme général $f(n)$?

2) Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^*)$. On suppose qu'il existe $a < 0$ tel que $\frac{f'(x)}{f(x)} \sim \frac{a}{x}$ quand x tend vers $+\infty$. Quelle est la nature de la série de terme général $f(n)$?

Exercice 23 (★ ☆ ☆)
Existence et calcul de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n)!}$.

Exercice 24 (★ ★ ☆)
On pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $D_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kx)$.

1) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, $D_n(x) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{2\sin(\frac{x}{2})}$.

2) Montrer que $\forall \varphi \in \mathscr{C}^1([0,\pi], \mathbb{R})$, $\lim_{\lambda \to +\infty} \int_0^{\pi} \varphi(x)\sin(\lambda x)\,\mathrm{d}x = 0$.

3) Exprimer $\int_0^{\pi} xD_n(x)\,\mathrm{d}x$ sous forme d'une somme et en déduire la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

Exercice 25 (★ ★ ☆)

1) Calculer $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

2) On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$. Montrer que la série de terme général R_n converge et déterminer sa somme.

Exercice 26 (★ ★ ☆)

Soit $f \in \mathscr{C}^1([1, +\infty[, \mathbb{R})$. On suppose que $(f')^2$ est intégrable sur $[1, +\infty[$. Montrer que $t \mapsto \frac{f(t)^2}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Exercice 27 (★ ★ ☆)

Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ décroissante.

1) Si f est intégrable, montrer que $xf(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$.

2) La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 28 (★ ★ ☆)

1) Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ dans $(\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$. On suppose que la série de terme général u_n converge. Montrer que la série de terme général u_n^2 converge.

2) Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. On suppose f intégrable sur $\mathbb{R}_+$. La fonction f^2 est-elle intégrable sur $\mathbb{R}_+$?

Exercice 29 (★ ☆ ☆)

Soit, pour $n \geqslant 1$: $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^4)^n}$.

1) Démontrer l'existence de I_n et trouver sa limite quand $n \to \infty$.

2) En posant $u = \frac{1}{x}$, montrer que $I_1 = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1+u^2}{1+u^4}\,\mathrm{d}u$. Puis, en posant $v = u - \frac{1}{u}$, calculer I_1.

3) Calculer I_n.

Exercice 30 (★ ★ ☆)

Soit E l'espace vectoriel des fonctions $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ telles que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $t \mapsto t^k f(t)$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$.

1) Montrer que la fonction $t \mapsto \exp(-t^2/2)$ appartient à E.

2) Soient $f \in E$ et $g\colon x \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que $g \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$.

3) On pose $\alpha_k = \int_{\mathbb{R}} |t^k f(t)|\,\mathrm{d}t$. Montrer que g est développable en série entière sur un intervalle $]-A, A[$ à préciser.

Exercice 31 (★ ★ ☆)

Soit $F\colon x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(tx)}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$.

1) Déterminer le domaine de définition D de F.

2) Montrer que F est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

3) Exprimer F sur D.

4) En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} (\frac{\arctan t}{t})^2\,\mathrm{d}t$.

Exercice 32 (★ ★ ☆)

Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ telle que, pour tout $x > 0$, $0 < f(x) < x$. On définit la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ par $f_1 = f$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_{n+1}\colon x \in \mathbb{R}_+ \mapsto f \circ f_n(x)$. Montrer la convergence simple de (f_n). A-t-on convergence uniforme sur $[0, a]$? Sur $[a, +\infty[$?

Exercice 33 (★ ★ ☆)

Soit $S\colon x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$.

1) Montrer que S est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

2) Étudier les variations de S et préciser les limites de S en 0 et $+\infty$.

3) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ xS(x) - S(x+1) = \frac{1}{e}$.

4) Trouver un équivalent de S en 0 et en $+\infty$.

Exercice 34 (★ ★ ☆)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{(x+ne^{-x})(x^3+1)}{e^x+n}\,\mathrm{d}x$. Déterminer la limite de (u_n).

Exercice 35 (★★☆)

Soit $I = \int_0^1 \frac{t(\ln t)^2}{2(1-t)^2}\,\mathrm{d}t$.

1) Montrer que I est convergente.

2) Développer en série entière $x \mapsto \frac{1}{(1-x)^2}$.

3) En déduire que $I = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

Exercice 36 (★★☆)

Soient $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $S_a \colon x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

1) On suppose que la série de terme général a_n est convergente de somme $A \neq 0$.

a) Montrer que $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est de rayon de convergence supérieur ou égal à 1.

b) Soit $g \colon x \in]-1,1[\mapsto \frac{S_a(x)}{1-x}$. Montrer que g est développable en série entière et en déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur de $g^{(n)}(0)$.

c) Montrer que $g(x) \sim_{1^-} \frac{A}{1-x}$ et en déduire $\lim_{x\to 1^-} S_a(x)$.

2) On suppose ici que la suite a est positive, telle que la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ soit de rayon de convergence supérieur ou égal à 1 et la série de terme général a_n soit divergente. Que peut-on dire de $\lim_{x\to 1^-} S_a(x)$?

3) Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = (-1)^n$, montrer que $\lim_{x\to 1^-} S_a(x)$ est finie.

4) Énoncer le résultat démontré dans cet exercice.

Exercice 37 (★★☆) Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $g : U \to \mathbb{R}$.

g est harmonique ssi elle admet des dérivées partielles secondes et $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0$.

1) Trouver 2 réels a, b tels que $\forall t \in]-1,1[,\ \dfrac{1}{1-t^2} = \dfrac{a}{1-t} + \dfrac{b}{1-t}$.

2) Résoudre sur $]-1,1[$ l'équation différentielle $(1-t^2)y''(t) - 2ty'(t) = 0$.

3) Soit $F = f \circ g$ avec $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\mathscr{C}^2$ et g harmonique sur $\mathbb{R}^2$. Déterminer les dérivées partielles de F à l'ordre 2 (en fonction de celles de g).

4) Montrer, à la condition que f'' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, que F est harmonique ssi g est constante.

5) Déterminer l'ensemble des fonctions $h :]-1,1[\to \mathbb{R}$ telles que $G : (x,y) \mapsto h\left(\dfrac{\cos(x)}{\cosh(y)}\right)$ soit harmonique sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 38 (★★☆)

Soit $f \colon (x,y) \mapsto x^3 + y^3 - 3xy$.

1) Déterminer les points critiques de f.

2) En $(0,0)$, la fonction f admet-elle un extremum local ? Global ?

3) Montrer que f n'admet pas un extremum global en $(1,1)$.

III. Topologie

Exercice 39 (★★☆) Soient E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel, N_1 et N_2 deux normes sur E.

1) Soit (u_n) une suite qui converge dans (E, N_1). On suppose que N_1 et N_2 sont équivalentes. Montrer que (u_n) converge dans (E, N_2).

2) On suppose qu'une suite (u_n) converge dans (E, N_1) si et seulement si (u_n) converge dans (E, N_2). Montrer que N_1 et N_2 sont équivalentes.

3) On prend $E = \mathbb{R}[X]$ et, pour $a \in \mathbb{R}, N_a(P) = |P(a)| + \displaystyle\int_0^1 |P'(t)| \,\mathrm{d}t$. Montrer que, si $a, b \in [0,1], N_a$ et N_b sont équivalentes.

4) Soit, pour $n \in \mathbb{N}, P_n = \dfrac{X^n}{2^n}$. Trouver les valeurs de a telles que (P_n) converge pour N_a et déterminer alors la limite.

5) En déduire que N_a et N_b ne sont pas équivalentes si $0 \leqslant a < b$ et $b > 1$.

Exercice 40 (★★☆) Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Une suite $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ est de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \geqslant N, \|u_n - u_m\| \leqslant \varepsilon$.

1) Montrer que toute suite convergente est de Cauchy.

2) Dans $E = \mathbb{R}[X]$ muni de la norme $\left\|\sum a_k X^k\right\| = \max |a_k|$, montrer que la suite (P_n) de terme général $P_n = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{X^k}{k}$ est de Cauchy sans être convergente.

3) Montrer que toute suite de Cauchy est bornée.

4) Montrer que, si (u_n) est de Cauchy et possède une suite extraite convergente, alors (u_n) est convergente.

5) On admet le théorème de Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{R}$. Montrer que si E est de dimension finie, alors la suite (u_n) est convergente si et seulement si elle est de Cauchy.

Exercice 41 (★★★)

Soit $E = \{f \in \mathscr{C}^2([0,1], \mathbb{R}),\ f(0) = f'(0) = 0\}$.

1) Montrer que $\|f\| = \|f + 2f' + f''\|_\infty$ définit une norme sur E.

2) Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $\|f\|_\infty \leqslant C\|f\|$ pour toute $f \in E$. Trouver le plus petit C vérifiant la relation précédente.

3) Les normes $\|\ \|$ et $\|\ \|_\infty$ sont-elles équivalentes ?

Exercice 42 (★★☆)

Soient E l'espace vectoriel des suites réelles bornées et F l'espace vectoriel des suites réelles dont la série associée est absolument convergente. Si $u \in E$, on pose $N_E(u) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$; si $v \in F$, on pose $\widetilde{N}_F(v) = \sum_{n=0}^{+\infty} |v_n|$.

1) Quelle est la relation d'inclusion entre E et F ? Ces espaces sont-ils de dimension finie ?

2) On note pour $v \in F$, $T_v\colon \xi \in E \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \xi_n v_n \in \mathbb{R}$ et pour $u \in E$, $\widetilde{T}_u\colon \tilde{\xi} \in F \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \tilde{\xi}_n u_n \in \mathbb{R}$. Montrer que ces applications sont bien définies, linéaires et lipschitziennes.

Exercice 43 (★★☆)

1) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré n. Montrer que P est scindé sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|P(z)| \geqslant |\operatorname{Im} z|^n$.

2) Montrer que l'adhérence de l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices trigonalisables.

IV. Probabilités

Exercice 44 (★★☆) Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi géométrique de paramètre p.

1) Déterminer la loi de $Z = \dfrac{X}{Y}$.

2) Calculer l'espérance de Z.

3) Montrer que $E(Z) > 1$.

Exercice 45 (★★☆) On lance 6 dés et on relance ceux qui n'ont pas donné 6 jusqu'à obtenir que des 6.
On note X la variable aléatoire comptant le nombre de lancers nécessaires.

1) Donner la loi de X. On pourra commencer par $P(X \leqslant k)$.

2) X admet-elle une espérance finie ?

Exercice 46 (★☆☆) On dispose d'une pièce équilibrée et d'une urne contenant une boule blanche. On répète l'opération suivante :

— si on fait face, on ajoute une boule noire dans l'urne ;

— si on fait pile, on tire une boule dans l'urne et on arrête les tirages.

On note X la v.a. du rang d'arrêt de l'expérience.

1) Déterminer la loi de X.

2) Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche après le dernier lancer ?

Exercice 47 (★☆☆) Soit (U, V) un couple de v.a. indépendantes et suivant la même loi binomiale de paramètres $(2, 1/2)$.

1) Soit $T = (U-1)^2 + (V-1)^2$. Donner la loi de T.

2) Soit $S = (U-1)(T-1) + 1$.

a) Calculer $E(T(S-1))$.

b) Donner la loi de S.

c) Calculer $\text{Cov}(S, T)$.

d) S et T sont-elles indépendantes ?

Exercice 48 (★☆☆)

Soit X_1, X_2 deux v.a. indépendantes suivant $\mathscr{B}(n, \frac{1}{2})$ et : $M = \begin{pmatrix} X_1 & 1 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix}$.

On admet pour l'instant que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

1) Calculer la probabilité $P(X_1 = X_2)$.

2) Donner la probabilité que M soit diagonalisable.

3) En développant $(1+X)^{2n}$ de deux manières différentes, montrer l'égalité admise.

Exercice 49 (★☆☆) Soit X et Y deux v.a. indépendantes telles que $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{P}(\mu)$. On note $Z = X + Y$.

1) Montrer que $Z \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda + \mu)$.

2) Trouver la loi de X sachant $(Z = n)$.

Exercice 50 (★☆☆) Soit X, Y deux v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$, et $p \in]0,1[$, telles que :

$$P(X=k, Y=n) = \begin{cases} \binom{n}{k} \frac{1}{2^n} p(1-p)^n & \text{si } k \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1) Déterminer la loi de Y.

2) Donner le developpement en série entière de $\frac{1}{1-x}$. Montrer que :

$$\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$$

et en déduire la loi de X.

3) Est-ce que X et Y sont indépendantes ?

Exercice 51 (★★☆) Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a. mutuellement indépendantes et suivant toutes la même loi $\mathscr{B}(p)$. On note $Y_n = \frac{1}{2}(X_n + X_{n+1})$.

1) Énoncer la loi faible des grands nombres.

2) Les Y_n sont-ils indépendants ?

3) On note $M_n = \dfrac{Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n}{n}$. Calculer $E(M_n)$ et $V(M_n)$.

4) Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, $P\left(|M_n - p| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \dfrac{p(1-p)(2n-1)}{2n^2\varepsilon^2}$.

Exercice 52 (★★☆)

1) Soit X une variable aléatoire réelle centrée et vérifiant p.s. $|X| \leqslant 1$, soit $t \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que $E\left[\mathrm{e}^{tX}\right] \leqslant \mathrm{ch}(t)$.

b) En déduire que $E\left[\mathrm{e}^{tX}\right] \leqslant \exp\left(\dfrac{t^2}{2}\right)$.

2) En déduire l'inégalité de Hoeffding, qui s'énonce comme suit. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et centrées. On suppose qu'il existe (c_n) vérifiant : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n > 0$ et p.s. $|X_n| \leqslant c_n$. Notons $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$:

$$P(|S_n| > \varepsilon) \leqslant 2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\sum_{i=1}^{n} c_i^2}\right).$$

Exercice 53 (★☆☆)
Soit $a > 0$. Une variable aléatoire X a pour loi $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(X=n) = \frac{a}{n(n+1)}$. Déterminer a. La variable X admet-elle une espérance ? Une variance ? Expliciter la fonction génératrice de X.

Exercice 54 (★★☆)
Soient $a > 0$ et X une variable aléatoire telle que $E(X) = V(X) = a$.

1) Donner un exemple de variable aléatoire vérifiant cette condition.

2) Montrer que $P(X \geqslant 2a) \leqslant P((X-a+1)^2 \geqslant (a+1)^2)$.

3) Montrer que $P(X \geqslant 2a) \leqslant \frac{1}{a+1}$.

Exercice 55 (★★☆)
Soient X, Y, Z trois variables aléatoires indépendantes. On suppose que $X \sim \mathscr{P}(2)$, $Y \sim \mathscr{P}(2)$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(Z=n) = \frac{1}{2^{n+1}}$.

1) Calculer $E(Z)$ et $V(Z)$.

2) Déterminer l'espérance et la variance de $X+Y$.

3) Soit $T = X + Z$. Déterminer la fonction génératrice de T. Calculer $E(T)$ et $V(T)$.