# Exercices de préparation aux oraux
# À préparer à la maison

## I. Algèbre

**Exercice 1 ( ★☆☆)**

Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré $n$ et $(a_0, \dots, a_n)$ un $(n+1)$–uplet de réels tous distincts.

Montrer que $(P(X+a_0), P(X+a_1), \dots, P(X+a_n))$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

**Exercice 2 ( ★★★)**

– Règle de Descartes –

Si $P \in \mathbb{R}[X]$, on note $Z(P)$ le nombre de racines de $P$ dans $\mathbb{R}_+^*$, comptées avec leur ordre de multiplicité

**1)** Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On suppose que les racines réelles de $P$ sont simples. Montrer que $Z(P') \geqslant Z(P) - 1$.

**2)** Soit $P = a_1 X^{n_1} + a_2 X^{n_2} + \cdots + a_p X^{n_p}$ où les $a_i$ sont non nuls et la suite $(n_i)$ est une suite strictement croissante d'entiers. On note $V(P)$ le nombre de changements de signe de $(a_1, \dots, a_n)$. Montrer que $V(P) \geqslant Z(P)$. Montrer que $V(P) - Z(P)$ est un entier pair.

**Exercice 3 ( ★★☆)** Soit $P$ un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que $P(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Montrer qu'il existe $S, T \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P = S^2 + T^2$. *Indications :*

**1)** Montrer que les racines réelles de $P$ sont de multiplicité paire.

**2)** Pour $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, écrire $(X-\alpha)(X-\bar{\alpha})$ comme somme de deux carrés de polynômes.

**Exercice 4 ( ★★☆)**

Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$–espaces vectoriels de dimension finie et $G$ un sous-espace vectoriel de $E$. On pose $A = \{u \in \mathscr{L}(E,F),\ G \subset \operatorname{Ker} u\}$. Montrer que $A$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E,F)$ dont on donnera la dimension.

**Exercice 5 ( ★★☆)**

Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$. Montrer que $A$ est semblable à $-A$ si et seulement si $\operatorname{tr}(A) = 0$.

**Exercice 6 ( ★★☆)** Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$. Montrer que la matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par : $A_{i,j} = P(x+i+j-2)$ n'est pas inversible.

**Exercice 7 ( ★★☆)** Soient $a_1, \dots, a_n$ des nombres complexes distincts. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice de terme général $a_{i,j} = \begin{cases} 0 \text{ si } i = j \\ a_j \text{ si } i \neq j \end{cases}$. Soit $P : x \mapsto \det(A + xI_n)$.

**1)** Montrer que $P$ est un polynôme unitaire de degré $n$.

**2)** Calculer $P(a_i)$.

**3)** Trouver l'expression de $P$.

**4)** Décomposer $\dfrac{P(X)}{(X-a_1)\cdots(X-a_n)}$ en éléments simples.

**5)** Calculer $\det(A + I_n)$.

**Exercice 8** ( ★☆☆) Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $A_n = \begin{pmatrix} 1 & a/n \\ -a/n & 1 \end{pmatrix}$.

**1)** Soient $a \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, z_n = (1 + i\frac{a}{n})^n$. Montrer que $z_n \to e^{ia}$.

**2)** Diagonaliser $A_n$ dans $\mathbb{C}$.

**3)** Déterminer $\lim A_n^n$.

**Exercice 9** ( ★☆☆) Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$, $A = X^4 - 1$ et $B = X^4 - X$.

Pour $P \in E$, on note $f(P)$ le reste de la division euclidienne de $AP$ par $B$.

**1)** Montrer que $f$ est un endomorphisme.

**2)** Déterminer Ker $f$ et calculer le rang de $f$.

**3)** Étudier la diagonalisabilité de $f$.

**Exercice 10** ( ★★☆) Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe des complexes deux à deux distincts $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ tels que $A + \lambda_i B$ est nilpotente pour tout $i$.

**1)** Montrer que l'indice de nilpotence d'une matrice nilpotente de taille $n$ est inférieur ou égal à $n$.

**2)** Montrer que : $\forall \lambda \in \mathbb{C}, (A + \lambda B)^n = 0$.

**3)** Montrer que $A$ et $B$ sont nilpotentes.

**Exercice 11** ( ★☆☆)

**1)** Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un polynôme $P_n$ de degré $\leqslant n$ tel que $X + 1 - P_n^2(X)$ soit divisible par $X^{n+1}$. *Indication* : Penser aux développements limités.

**2)** Soit $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente. Montrer qu'il existe une matrice $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que $B^2 = I_n + N$.

**Exercice 12** ( ★★☆) Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & -a & b \\ a & 0 & -c \\ -b & c & 0 \end{pmatrix}$.

**1)** Montrer qu'il existe $d$ tel que $A^3 + dA = 0$.

**2)** Déterminer $d$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $A^{2n}$ en fonction de $d, n$ et $A^2$.

**3)** Déterminer $\alpha$ et $\beta$ tels que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} = I_3 + \alpha A + \beta A^2$.

**Exercice 13** ( ★☆☆) Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$. pour $P, Q \in E$, on note $\Phi(P,Q) = \displaystyle\sum_{k=0}^{3} (P(k) + P(1))(Q(k) + Q(1))$. Pour tout $i \in [\![0,3]\!]$, on note $L_i(t) = \displaystyle\prod_{\substack{0 \leqslant k \leqslant 3 \\ k \neq i}} \frac{t-k}{i-k}$.

**1)** Calculer $L_i(j)$ pour tous $i, j \in [\![0,3]\!]$. En déduire que $(L_0, L_1, L_2, L_3)$ est une base de $E$.

**2)** Montrer que $\Phi$ est un produit scalaire sur $E$.

**3)** Trouver une base orthonormée de $E$.

**Exercice 14** ( ★★★) Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. On dit que $A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ lorsque, pour toute matrice $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nulle, $X^T AX > 0$.

**1)** Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

**2)** Soit $A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ : $A = \begin{pmatrix} B & C \\ C^T & D \end{pmatrix}$. Montrer que $\det(B) > 0$, puis montrer que $\det(A) \leqslant \det(B)\det(D)$.

**Exercice 15** ( ★ ★ ☆)
– Matrice de Gram –

Soit $E=\{f\in\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ \int_{\mathbb{R}} f^2\ \text{ existe}\}$. Si $(f,g)\in E^2$, on pose $\langle f,g\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.

**1)** Montrer que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire.
Soient $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\in E^{\mathbb{N}^*}$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $Q_n=(\langle\varphi_i,\varphi_j\rangle)_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $r\in\mathbb{N}^*$ tel que $Q_r$ soit inversible.

**2)** Montrer que la plus petite valeur propre de $Q_r$ est strictement positive.

**3)** Montrer que $\varphi_{r+1}\in\operatorname{Vect}(\varphi_1,\dots,\varphi_r)$ si et seulement si $Q_{r+1}$ est non inversible.

**4)** On suppose que, pour tout $(i,j,k)\in(\mathbb{N}^*)^3$, $\langle\varphi_{i+k},\varphi_{j+k}\rangle=\langle\varphi_i,\varphi_j\rangle$ et que $Q_{r+1}$ est non inversible. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\varphi_n\in\operatorname{Vect}(\varphi_1,\dots,\varphi_r)$.

**Exercice 16** ( ★ ☆ ☆)
Caractériser les matrices $M$ de projecteurs telles que $M^\top M=MM^\top$.

**Exercice 17** ( ★ ★ ☆)
Soient $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels d'un espace euclidien $(E,\|\ \ \|)$. Montrer que $F$ et $G$ sont supplémentaires orthogonaux si et seulement si, pour tout $x\in E$, $\|x\|^2=d^2(x,F)+d^2(x,G)$.

**Exercice 18** ( ★ ★ ☆)
Soient $(E,\langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien et $a$ dans $E$ de norme 1. Si $\alpha\in\mathbb{R}$, on pose $f_\alpha\colon x\in E\mapsto x+\alpha\langle a,x\rangle a$.

**1)** Soient $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Calculer $f_\alpha\circ f_\beta$. Pour quels $\alpha$ l'endomorphisme $f_\alpha$ est-il bijectif ?

**2)** Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. Déterminer les éléments propres de $f_\alpha$.

**3)** Pour quels $\alpha$ l'endomorphisme $f_\alpha$ est-il un automorphisme orthogonal de $E$ ?

**4)** Pour quels $\alpha$ l'endomorphisme $f_\alpha$ est-il un endomorphisme symétrique de $E$ ?

**Exercice 19** ( ★ ☆ ☆)
On pose, pour $n\in\mathbb{N}$, $A_n=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} t^n e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

**1)** Calculer $A_n$ en distinguant deux cas selon la parité de $n$. Donnée : $A_0=1$.

**2)** Pour tous $P,Q\in\mathbb{R}[X]$, on pose $\varphi(P,Q)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} P(t)Q(t)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$. Vérifier que $\varphi$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

**3)** Calculer $\mathrm{d}(X^3,\mathbb{R}_2[X])$.

**Exercice 20** ( ★ ★ ☆)
Soient $U$ et $V$ dans $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(U,V)$ pour que $\dfrac{1}{6}U+\dfrac{5}{6}V$ soit dans $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Généraliser.

**Exercice 21** ( ★ ★ ☆)
Quel est le cardinal de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})\cap\mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$ ?

**Exercice 22** ( ★ ☆ ☆)
– Transformation de Cayley –

On munit $E=\mathbb{R}^{2n+1}$ du produit scalaire canonique $\langle\ ,\ \rangle$. Soient $f\in\mathscr{L}(E)$ et $A\in\mathscr{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ la matrice canoniquement associée à $f$. On suppose que $A$ est antisymétrique.

**1)** Montrer que $\forall(x,y)\in E^2$, $\langle f(x),y\rangle=-\langle x,f(y)\rangle$.

**2)** Montrer que l'unique valeur propre de $f$ est zéro.

**3)** Montrer que $A-I_{2n+1}$ et $A+I_{2n+1}$ sont inversibles.

**4)** On pose $B=(I_{2n+1}-A)(I_{2n+1}+A)^{-1}$. Montrer que $B\in\mathrm{O}_{2n+1}(\mathbb{R})$ et $\det B=1$.

**Exercice 23** ( ★ ★ ☆)
Soit $E$ un espace euclidien. Si $f\in\mathscr{L}(E)$, on pose $\alpha(f)=\operatorname{tr}(f^*\circ f)$.

**1)** Calculer $\alpha(p)$ lorsque $p$ est un projecteur orthogonal.

**2)** Soit $p$ un projecteur quelconque de rang $r$. Montrer que $\alpha(p)\geqslant r$ et étudier le cas d'égalité.

**Exercice 24 ( ★☆☆)**

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $(A + A^\top)^p = 0$. Montrer que $A$ est antisymétrique.

**Exercice 25 ( ★☆☆)**

Soit $M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^k = I_n$. Montrer que $M^2 = I_n$.

**Exercice 26 ( ★★☆)**

Soient $A$ et $B$ dans $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$ ayant le même spectre. Montrer l'existence de $t \in \mathbb{R}$ tel que $A = RBR^{-1}$ où

$$R = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

**Exercice 27 ( ★★☆)**

On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique noté $\langle\ ,\ \rangle$. Soient $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ avec $\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ le spectre ordonné de $A$.

**1)** Montrer que $\lambda_1 = \inf\{\langle Ax, x\rangle,\ x \in \mathbb{R}^n \text{ et } \|x\| = 1\}$.

**2)** Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|x\| = 1$ et $\langle Ax, x\rangle = \lambda_1$. Montrer que $Ax = \lambda_1 x$.

**3)** Soit $x = (x_1, \ldots, x_n)^\top$ un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_1$. On note $x^+$ le vecteur de coordonnées $\max\{x_i, 0\}$ et $x^-$ le vecteur de coordonnées $\max\{0, -x_i\}$. On a donc $x = x^+ - x^-$. Montrer que $\langle Ax^+, x^-\rangle \geqslant 0$.

**Exercice 28 ( ★★★)**

– Théorème de Courant-Fisher et théorème d'entrelacement de Cauchy –

Soient $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de $A$ avec $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$.

**1)** Si $k \in \{1, \ldots, n\}$, montrer que : $\lambda_k = \min\{\max\{\langle Ax, x\rangle,\ x \in F \text{ et } \|x\| = 1\},\ F \text{ sous-espace de } \mathbb{R}^n \text{ de dimension } k\}$.

**2)** Soient $B$ la matrice obtenue en supprimant la dernière ligne et la dernière colonne de $A$, et $\mu_1, \ldots, \mu_{n-1}$ les valeurs propres de $B$ avec $\mu_1 \leqslant \cdots \leqslant \mu_{n-1}$. Montrer que $\lambda_1 \leqslant \mu_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_{n-1} \leqslant \mu_{n-1} \leqslant \lambda_n$.

**Exercice 29 ( ★★★)**

– Produit de Hadamard de deux matrices symétriques positives –

On note $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que : $\forall u \in \mathbb{R}^n,\ u^\top M u \geqslant 0$.

**1)** Montrer que l'ensemble $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ est stable par addition et par produit par un réel positif.

**2)** Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, on a $S = uu^\top \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.

**3)** Soit $M$ une matrice de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $M \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement si toutes les valeurs propres de $M$ sont positives.

**4)** On définit le produit de Hadamard de deux matrices comme le produit coefficient par coefficient : si $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ sont deux matrices de $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$, on pose $A \odot B = (a_{i,j}.b_{i,j})$. Montrer que $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ est stable par le produit de Hadamard.

**5)** Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$ et $c \in [0, +\infty[$. Soit $S = (s_{i,j})$ la matrice telle que $s_{i,j} = (u_i^\top u_j + c)^k$. Montrer que $S$ est une matrice de $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.

**Exercice 30 ( ★★★)**

Soit $X \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$, montrer que $I_n - X$ est inversible.

**Exercice 31 ( ★★☆)** Soient $p$ et $q$ deux projecteurs orthogonaux d'un espace euclidien.

**1)** Montrer que $u = p - q$ est diagonalisable et que $\mathrm{Sp}(u) \subset [-1, 1]$.

**2)** Déterminer $\mathrm{Ker}(u + \mathrm{id})$ et $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id})$.

## II. Analyse

**Exercice 32 ( ★☆☆)**
Soit $(u_n)$ une suite réelle décroissante telle que $u_n + u_{n+1} \sim \frac{1}{n}$. Montrer que $u_n$ tend vers zéro. Trouver un équivalent de $u_n$.

**Exercice 33 ( ★☆☆)**
Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Montrer qu'il existe des suites $v$ et $w$ respectivement croissante et décroissante telles que $u = v + w$.

**Exercice 34 ( ★★★)**
Si $u$ est une suite de nombres complexes, on note $V(u)$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de $u$. On rappelle que $a \in \mathbb{C}$ est une valeur d'adhérence de $u$ si et seulement s'il existe une sous-suite de $u$ convergeant vers $a$.

**1)** Montrer que $a \in V(u)$ si et seulement si toute boule ouverte centrée en $a$ contient une infinité d'éléments de $u$.

**2)** Montrer que $V(u)$ est un fermé.

Dans ce qui suit, on suppose que $u$ est une suite réelle.

**3)** Montrer que l'on peut extraire de $u$ une sous-suite monotone.

**4)** On suppose que $u$ est bornée. Montrer que $V(u)$ est non vide, puis montrer que $V(u)$ est réduit à un singleton si et seulement si $u$ est convergente.

**5)** Soient $a, b$ deux réels tels que $a < b$, $f\colon [a, b] \to [a, b]$ continue et $(u_n)$ la suite définie par $u_0 \in [a, b]$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que $(u_n)$ converge si et seulement si $u_{n+1} - u_n \to 0$.

**Exercice 35 ( ★★☆)**
Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par $u_0 > 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$.

**1)** Déterminer un équivalent de $u_n$.

**2)** Déterminer la nature, suivant $\alpha > 0$, de la suite de terme général $u_n^\alpha$

**Exercice 36** ( ★★☆)

On définit une suite $(u_n)$ par $u_0 > 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$.

**1)** Montrer que $u_n$ diverge vers $+\infty$.

**2)** Montrer que $\frac{1}{u_n^2} \leqslant \frac{1}{u_n}$, en déduire que $2 \leqslant u_{n+1}^2 - u_n^2 \leqslant 2 + u_{n+1} - u_n$.

**3)** Montrer que $u_n \sim \sqrt{2n}$.

**Exercice 37** ( ★☆☆) On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $u_{3n} = \dfrac{2}{\ln(n+3)}$ et $u_{3n+1} = u_{3n+2} = \dfrac{-1}{\ln(n+3)}$.

**1)** Montrer que la série $\sum u_n$ est convergente et calculer sa somme.

**2)** Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que la série $\sum a_n$ converge. A-t-on nécessairement la convergence de la série $\sum a_n^2$ ?

**3)** Montrer, pour tout entier $p \geqslant 2$, la divergence de la série $\sum u_n^p$.

**Exercice 38** ( ★☆☆) Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite définie par $u_1 > 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \dfrac{u_n}{n} + \dfrac{1}{n^2}$.

**1)** Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

**2)** Étudier la convergence de la série $\sum u_n$.

**Exercice 39** ( ★☆☆) Soit $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}^{+*}$.

**1)** À quelle condition nécessaire la série $\sum \dfrac{(-1)^k}{f(k)}$ est-elle convergente ? Cette condition est-elle suffisante ? On suppose par la suite que cette condition est vérifiée.

**2)** On suppose de plus que $f$ est croissante à partir d'un certain rang. On pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{f(k)}$. Déterminer le signe de $u_n$ et la limite de la suite $(u_n)$.

**3)** On suppose également que, pour tout $k$ assez grand, $\dfrac{1}{f(k)} + \dfrac{1}{f(k+2)} \geqslant \dfrac{2}{f(k+1)}$. Déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

**Exercice 40** ( ★★☆)

Soient $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ bijective et $g = f^{-1}$. Montrer que la série de terme général $\frac{1}{f(n)}$ converge si et seulement si la série de terme général $\frac{g(n)}{n^2}$ converge.

**Exercice 41** ( ★☆☆)

Soient $(u_n)$ une suite à termes positifs et $(v_n)$ définie par $v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \frac{1}{2}(v_n + \sqrt{v_n^2 + u_n})$. Montrer que la suite $(v_n)$ converge si et seulement si la série de terme général $u_n$ converge.

**Exercice 42** ( ★★☆)

Montrer que $\sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{k}$ est équivalent à $\frac{\ln(n)^2}{2}$.

**Exercice 43** ( ★★☆)

Soit $f\colon t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \frac{t}{\sqrt{t+1}}$. Étudier la limite de la suite de terme général $u_n = \sum_{k=1}^n f(\frac{k}{n^2})$.

**Exercice 44** ( ★★☆)

– Inegalité de Hardy harmonique –

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite à termes strictement positifs. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^n \frac{k^2}{u_k}$.

**1)** Prouver l'inégalité : $\frac{n(n+1)}{2} \leqslant \sqrt{n^2\alpha_n \sum_{k=1}^n u_k}$.

**2)** Montrer que $\frac{n}{\sum_{k=1}^n u_k} \leqslant 2(\alpha_n - \alpha_{n+1} + \frac{1}{u_{n+1}})$.

**3)** En déduire que la convergence de la série de terme général $\frac{1}{u_n}$ entraîne la convergence de la série de terme général $\frac{n}{\sum_{k=1}^n u_k}$.

**Exercice 45** ( ★★☆)

Pour $n \geqslant 2$, soit $a_n = \sum_{k=2}^n (\ln k)^2$. Nature de la série de terme général $\frac{1}{a_n}$ ?

**Exercice 46** ( ★★☆)

Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}_+^*)$ telles que $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ f(\frac{2xy}{x+y}) = \frac{f(x)}{2} + \frac{f(y)}{2}$.

**1)** Soit $f \in \mathscr{E}$. Montrer que $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ \frac{2x^2}{(x+y)^2} f'(\frac{2xy}{x+y}) = \frac{f'(y)}{2}$.

**2)** Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $\forall t \in ]0, A[,\ \exists ! x \in ]0, A[,\ \frac{2xA}{x+A} = t$.

**3)** Soit $f \in \mathscr{E}$. Montrer que $t \mapsto t^2 f'(t)$ est constante sur $\mathbb{R}_+^*$. Déterminer $\mathscr{E}$.

**4)** Déterminer l'ensemble $\mathscr{F}$ des $g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}_+^*)$ telles que $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ g(\frac{x+y}{2}) = \frac{1}{2}(g(x) + g(y))$. Retrouver $\mathscr{E}$.

**Exercice 47** ( ★★☆)

Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que l'image de tout intervalle ouvert est un intervalle ouvert. Montrer que $f$ est monotone.

**Exercice 48** ( ★★☆)

Soit $f\colon x \in [e, +\infty[ \mapsto \frac{x}{\ln x}$.

**1)** Montrer que $f$ réalise une bijection de $[e, +\infty[$ sur lui-même.

**2)** Montrer que $f^{-1}(x) \sim x \ln x$ quand $x \to +\infty$.

**Exercice 49** ( ★★☆)

Pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$, soit $u_n\colon x \mapsto \frac{xe^{-nx}}{\ln n}$.

**1)** Déterminer le domaine de définition $D$ de la série de fonctions de terme général $u_n$. Pour $x \in D$, on pose $S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} u_n(x)$.

**2)** Montrer qu'il n'y a pas convergence normale de la série de fonctions sur $D$.

**3)** Si $n \geqslant 2$, soit $R_n\colon x \in D \mapsto \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$. Montrer que $\forall x \in D,\ |R_n(x)| \leqslant \frac{1}{\ln n}$.

**4)** La fonction $S$ est-elle continue sur $D$ ? Est-elle intégrable sur $D$ ?

**Exercice 50** ( ★☆☆)

Soit $(f_n)$ une suite de fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $(f_n)$ converge simplement vers une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ |f_n'(x)| \leqslant 1$. Montrer que $f$ est continue.

**Exercice 51** ( ★★☆)

Soient $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite bornée et, pour $n \in \mathbb{N}$, $s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

**1)** Déterminer les rayons de convergence de $U(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{u_k}{k!} x^k$ et $S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{s_k}{k!} x^k$.

**2)** Trouver une relation entre $U'$, $S$ et $S'$.

**3)** On suppose que $s_n$ tend vers une limite $\ell$ quand $n$ tend vers l'infini. Montrer qu'alors $e^{-x}S(x)$ tend vers une limite, à préciser, quand $x$ tend vers l'infini.

Application au cas où $u_n = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

**Exercice 52** ( ★★☆)

Pour $n \geqslant 2$, on note $f_n\colon x \mapsto \frac{xe^{-nx}}{\ln n}$ et $S\colon x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} f_n(x)$.

**1)** Déterminer le domaine de définition de $S$.

**2)** La série converge-t-elle normalement ? Uniformément ?

**3)** Montrer que $S$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

**4)** Montrer que $S$ n'est pas dérivable en 0.

**Exercice 53** ( ★☆☆)

On pose $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$.

**1)** Étudier la convergence simple de $\sum_{n\geqslant 0} f_n$.

**2)** Sur quels intervalles y a-t-il convergence normale ?

**Exercice 54** ( ★★☆)

Soit $E$ l'ensemble des $f \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,1[$ et telles que $\int_0^1 f'^2 = 1$.

**1)** Si $f$ appartient à $E$, montrer que $f$ est $\frac{1}{2}$–höldérienne de rapport 1, c'est-à-dire que $\forall (x,y) \in [0,1],\ |f(x) - f(y)| \leqslant \sqrt{|x-y|}$.

**2)** Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions de $E$ convergeant simplement vers $g$. Montrer que la convergence est uniforme.

**Exercice 55** ( ★☆☆)

Soit $\forall\, n \geqslant 1,\ S_n = \displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} \ell^n$.

**1)** À l'aide d'une minoration, montrer que $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

On pose $\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ f_k(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-k} \text{ si } x = 0 \\ (1-kx)^{1/x} \text{ si } 0 < x < 1/k \\ 0 \text{ si } x \geqslant 1/k \end{cases}$

On note $F$ la somme de $\sum f_k$ sur son domaine de définition.

**2)** Montrer que $f_k$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

**3)** **a)** Montrer que $\displaystyle\sup_{x\in\mathbb{R}^+} |f_k(x)| = \mathrm{e}^{-k}$.

**b)** En déduire la continuité de $F$ sur $\mathbb{R}^+$.

**4)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $F(\frac{1}{n}) = \dfrac{S_n}{n^n} - 1$.

**5)** Conclure qu'il existe $C > 0$ tel que $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} Cn^n$.

**Exercice 56** ( ★☆☆) Trouver les fonctions $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que $\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) + \displaystyle\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t = 1$.

**Exercice 57** ( ★★☆)

Soient $E$ l'ensemble des fonctions polynomiales réelles de degré $\leqslant n$ et, pour $k \in \{0,\ldots,n\}$, $\mu_k \colon t \mapsto t^k$.

**1)** Soient $x \in \mathbb{R}$ et $P \in E$. Montrer que $\int_{-\infty}^{x} P(t)e^t\,\mathrm{d}t$ converge.
Si $P \in E$, on pose $L(P) : P \mapsto e^{-x}\int_{-\infty}^{x} P(t)e^t\,\mathrm{d}t$.

**2)** Si $k \in \{0,\ldots,n-1\}$, montrer que $L(\mu_{k+1}) = \mu_{k+1} - (k+1)L(\mu_k)$.
En déduire $L(\mu_k) = (-1)^k k! \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \frac{\mu_j}{j!}$.

**3)** Déterminer les valeurs propres de $L$. L'endomorphisme $L$ est-il diagonalisable ?

**Exercice 58** ( ★★☆)

– Produit de convolution –

**1)** Soient $f, g \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On suppose $g$ bornée et $f$ intégrable. Montrer que l'application $x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t$ est définie sur $\mathbb{R}$ et bornée.

**2)** Soient $f, g \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On suppose $f^2$ et $g^2$ sont intégrables. Montrer que l'application $x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t$ est définie sur $\mathbb{R}$ et bornée.

**Exercice 59** ( ★★☆)

Soient $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ bornée et $g \colon x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} f(x-t)\,\mathrm{d}t$.

**1)** Montrer que $g$ est définie sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^2$.

**2)** Exprimer $g''$ en fonction de $g$ et de $f$.

**Exercice 60** ( ★★★)

Soient $f \colon x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx}}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$ et $g \colon x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

**1)** Montrer que $f$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

**2)** Montrer que $g$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

**3)** Trouver une équation différentielle vérifiée par $g$. En déduire $g$ puis $f$.

**Exercice 61** ( ★ ☆ ☆)
Soient $a > -1$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $I_n = \int_0^{+\infty} x^a e^{-nx} \, dx$. Existence de $I_n$ et limite de la suite $(I_n)_{n \geqslant 1}$.

**Exercice 62** ( ★ ★ ☆)
Existence et calcul de $F(t) = \int_0^{+\infty} \exp(-(x^2 + \frac{t^2}{x^2})) \, dx$.

**Exercice 63** ( ★ ★ ☆)

**1)** Montrer que la fonction $g : x \mapsto \frac{1-\cos x}{x^2}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

**2)** Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(tx)}{t^2(1+t^2)} \, dt$. Montrer que $f$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et vérifie $f(x) \leqslant x^2$ sur $\mathbb{R}$. Calculer $f'(0)$.

**3)** Montrer que $f$ est solution de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}_+^*$, $y'' - y = \frac{\pi}{2} - x \int_0^{+\infty} g(t) \, dt$.

**4)** En déduire que $f(x) = \frac{\pi}{2}(e^{-x} + x - 1)$ sur $\mathbb{R}_+$.

**Exercice 64** ( ★ ☆ ☆) On cherche à résoudre l'équation différentielle :

$$x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 0$$

On cherche les solutions développables en séries entières sous la forme $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et on note $r$ le rayon de convergence.

**1)** Montrer que $f$ est de classe $\mathscr{C}^2$ et donner $f'$ et $f''$.

**2)** Déterminer $(b_n)_n$ telle que :

$$x^2(1-x)f''(x) - x(1+x)f'(x) + f(x) = a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} b_n \left(a_n - a_{n-1}\right) x^n$$

**3)** Déterminer une relation de récurrence satisfaite par $(a_n)_n$.

**4)** Expliciter les solutions de $(H)$ qui sont développables en série entière et préciser le rayon de convergence.

**5)** Résoudre ( $H$ ) par la méthode de Lagrange (méthode de variation de la constante).

**Exercice 65** ( ★ ★ ☆)
Soit $f : x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$.

**1)** Montrer que $f$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1, +\infty[$.

**2)** Montrer que $f$ est développable en série entière au voisinage de zéro.

**Exercice 66** ( ★ ★ ☆)
– Nombres de Catalan –

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $c_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

**1)** Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, $c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

**2)** Montrer que $\sum c_n x^n$ a un rayon de convergence $R > 0$.

**3)** On pose $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$. Montrer que $f(x) = \frac{1}{2x}(1 - \sqrt{1-4x})$ pour $x \in ]-R, R[$. Que dire de $R$ ?

**Exercice 67** ( ★ ★ ☆)
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} \, dt$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière de terme général $a_n x^n$ et calculer sa somme.

**Exercice 68** ( ★ ★ ☆)
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \int_0^1 (\frac{1+t^2}{2})^n \, dt$.

**1)** Calculer $a_0$ et $a_1$. Déterminer la limite de $(a_n)$.

**2)**
- **a)** Étudier la monotonie de la suite $(a_n)$. En déduire la nature de la série de terme général $(-1)^n a_n$.
- **b)** Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n = 2 \int_0^1 \frac{dt}{3+t^2}$. En déduire la valeur de cette somme.

**3)** Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
- **a)** Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \geqslant \frac{1}{2n+1}$. En déduire le rayon de convergence $R$ de la série entière $\sum a_n x^n$.
- **b)** Montrer que $f$ est solution d'une équation différentielle que l'on déterminera.

**Exercice 69** ( ★★☆)

Soit $\varphi \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^*)$ croissante et $(E)\ : x''(t) + \varphi(t)x(t) = 0$. Montrer que toute solution $x$ de $(E)$ est bornée.

*Ind. On multipliera par* $\frac{x'}{\varphi}$.

**Exercice 70** ( ★★☆)

Résoudre le système

$$\begin{cases} x' &= x + 2y + te^t \\ y' &= 8x + y + e^{-t}. \end{cases}$$

**Exercice 71** ( ★★☆)

Soient $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ -1 < x < y < 1\}$, $D' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ -1 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1\}$ et $f : (x, y) \mapsto (y - x)^3 + 6xy$. Étudier les extrema de $f$ sur $D$ et sur $D'$.

**Exercice 72** ( ★★☆)

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^2 + x^2y + y^3$.

**1)** Monter que $f$ admet un point critique mais n'y atteint pas d'extremum local.

**2)** Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leqslant 1\}$. Montrer que $f$ admet un minimum $m$ et un maximum $M$ sur $D$. Déterminer les points de $D$ en lesquels ils sont atteints puis trouver les valeurs de $m$ et $M$.

# III. Topologie

**Exercice 73** ( ★★☆) Soit $E$ l'ensemble des applications lipschitzienne de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour $f \in E$, on note $K(f) = \inf \{k \in \mathbb{R}^+, f$ est $k$ - lipshitzienne $\}$.

**1)** Montrer que $E$ est un espace vectoriel.

**2)** Montrer que, pour tout $f \in E, f$ est $K(f)$-lipschitzienne.

**3)** Montrer que toute fonction polynomiale $P$ appartient à $E$ et déterminer $K(P)$.

**4)** L'application $f \mapsto K(f)$ est-elle une norme sur $E$ ?

**5)** Prouver que $\forall f \in E, \|f\|_\infty \leqslant \inf_{x\in[0,1]} |f(x)| + K(f)$.

**6)** L'application $f \mapsto \frac{K(f)}{\|f\|_\infty}$ est-elle bornée sur $E\backslash\{0\}$ ?

**Exercice 74** ( ★★☆)

Si $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $\|A\| = \sup_{i,j} |a_{i,j}|$ et on note $E_A$ l'ensemble des matrices semblables à $A$. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

Montrer que $E_A$ est borné pour la norme $\|\ \|$ si et seulement si $A$ est une matrice d'homothétie.

**Exercice 75** ( ★★☆)

Déterminer les $A \in \mathscr{GL}_2(\mathbb{C})$ telles que les suites $(A^n)$ et $(A^{-n})$ soient bornées.

**Exercice 76** ( ★☆☆) On donne $\varphi\ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (xy, x + y)$, $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > y\}$ et $V = \varphi(U)$.

**1)** Montrer que $V = \{(p, s) \in \mathbb{R}^2,\ s^2 > 4p\}$ .

**2)** Montrer que $V$ est un ouvert.

**3)** Montrer que $\varphi$ est de classe $\mathscr{C}^1$.

**Exercice 77 ( ★★★)**

Soit $(x_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que $(x_n)$ est de carré sommable si la série de terme général $x_n^2$ converge. On note $E$ l'ensemble des suites réelles de carré sommable.

**1)** Montrer que $E$ est un espace vectoriel.

**2)** Si $x$ et $y$ sont dans $E$, on pose $\langle x, y\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$. Montrer que cette application définit un produit scalaire sur $E$.

**3)** Soit, pour $k \in \mathbb{N}$, $x^k \in E$. On suppose que $x^k \to x$ c'est-à-dire que $\|x^k - x\| \to 0$. Soit $y \in E$. Montrer que $\langle y, x^k\rangle \to \langle y, x\rangle$ lorsque $k \to +\infty$.

**4)** Soit, pour $k \in \mathbb{N}$, $x^k \in E$. On suppose que $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n^k \to x_n$. Soit $y \in E$. Montrer que $\langle y, x^k\rangle \to \langle y, x\rangle$ lorsque $k \to +\infty$.

**Exercice 78 ( ★★☆)**

On munit $E = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ de la norme infinie $\forall f \in E,\ \|f\|_\infty = \max_{[0,1]} |f|$. Soit $T \in \mathscr{L}(E, \mathbb{R})$. On suppose que $\forall f \in E,\ f \geqslant 0 \Rightarrow T(f) \geqslant 0$. Montrer que $T$ est lipschitzien.

**Exercice 79 ( ★★★)**

Soit $p, q \in \mathbb{R}$ tels que $p > 1$, $q > 1$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

**1)** Montrer que $\forall a, b \in \mathbb{R}_+$, $ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

**2)** On définit la norme $p$ de $\mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ par $\|f\|_p = (\int_0^{+\infty} (f(x))^p \,\mathrm{d}x)^{1/p}$. Montrer que $\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$.

**3)** Soient $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ et

$$F\colon x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t & \text{si } x > 0 \\ f(0) & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Montrer que $F$ est continue et vérifie $\|F\|_p \leqslant \frac{p}{p-1}\|f\|_p$.

**Exercice 80 ( ★★☆)**

Soit $n \geqslant 2$. Montrer qu'il n'existe pas de norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ invariante par similitude.

**Exercice 81 ( ★★☆)** Soit $(E, \langle,\rangle)$, un espace euclidien et $F$ une partie fermée, non vide et convexe de $E$. Pour $x \in E$ on pose $d(x) = \inf_{f\in F} \|x - f\|$ et $\Gamma(x) = \{f \in F, \|x - f\| = d(x)\}$.

**1)** Caractériser l'ensemble des $x$ tels que $d(x) = 0$.

**2)** Montrer que $\Gamma(x)$ est non vide.

**3)** Montrer que $d$ est 1-lipschitzienne.

**4)** En utilisant une identité relative à la norme, montrer que :

$$\forall\,(f, f') \in \Gamma(x)^2, f \neq f' \Rightarrow \left\|\frac{1}{2}(f + f') - x\right\|^2 < d(x)^2$$

**5)** Montrer que $\Gamma(x)$ est réduit à un seul élément, que l'on notera $p(x)$.

**6)** Montrer que $p(x)$ est caractérisé par : $\forall\, y \in F, \langle x - p(x), y - p(x)\rangle \leqslant 0$.

## IV. Probabilités

**Exercice 82 ( ★ ☆ ☆)** On dispose de $n$ coffres. Soit $p$ la probabilité qu'un trésor se trouve dans un des coffres.
Si le trésor est placé dans un coffre, alors il se trouve dans l'un des coffres équiprobablement.
On ouvre $n-1$ coffres sans trouver le trésor.
Quelle est la proba qu'il se trouve dans le dernier coffre ?

**Exercice 83 ( ★ ☆ ☆)** Soit $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ des v.a. telles que $X_i \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$ et indépendantes entre elles. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.

**1)** Donner $E\left(\dfrac{S_n}{n}\right)$ et $V\left(\dfrac{S_n}{n}\right)$.

**2)** Montrer que $P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \dfrac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$.

**3)** On pose $u_n = \dfrac{1}{\ln^2 n} P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right)$. Donner la nature de $\sum u_n$.

**Exercice 84 ( ★ ☆ ☆)** On lance simultanément $n$ boules identiques qui viennent se loger dans trois urnes. On note $X$ la v.a. du nombre d'urnes restées vides après le lancer.

**1)** Quelles sont les valeurs prises par $X$ ?

**2)** Que vaut $P(X=2)$ ?

**3)** Déterminer la loi de $X$.

**4)** Calculer $E(X)$.

**5)** Limite de l'espérance lorsque $n \to +\infty$ et interprétation.

**Exercice 85 ( ★ ★ ☆)**

Soient $X, Y$ deux variables aléatoires strictement positives indépendantes et de même loi. Montrer que $E(\frac{X}{Y}) \geqslant 1$.

**Exercice 86 ( ★ ☆ ☆)** On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Soit $p \in ]0,1[$.

**1)** Soit $X$ une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p$.
Expliciter la loi de $X$. Montrer que $E\left(\dfrac{1}{X}\right) = \dfrac{-p\ln(p)}{1-p}$

*On rappelle que, pour* $|x| < 1$, $\ln(1-x) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$.

**2)** Soit $X$ une variable aléatoire réelle à valeurs dans $[1, +\infty[$. On suppose que $X(\Omega) = \{x_k \ ; \ k \in \mathbb{N}\}$ où les $x_k$ sont deux à deux distincts.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $p_k = P(X = x_k)$ et on considère $f_k : t \mapsto p_k \mathrm{e}^{-tx_k}$.
Soit $F_X$ la fonction $t \mapsto E(\mathrm{e}^{-tX})$.

**a)** Montrer que $F_X$ est définie sur $\mathbb{R}_+$ et trouver le lien entre $F_X$ et la série de fonctions $\sum f_k$.

**b)** Montrer que la série $\sum f_k$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$.

**3)** **a)** Montrer que $f_k$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_k(t)\mathrm{d}t$.

**b)** Montrer que $F_X$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} F_X(t)\mathrm{d}t$.
Quel est le lien avec $E\left(\dfrac{1}{X}\right)$ ?

**4)** On suppose que $X$ suit une loi géométrique de paramètre $p$. Calculer $F_X$ et retrouver le résultat de la question 1).

**Exercice 87 ( ★ ☆ ☆)** On a une pièce qu'on lance plusieurs fois. On note $X$ la v.a. associée au rang pour lequel on a la séquence « pile, face » pour la première fois. On note $Y$ la v.a. associée au rang du premier « pile ».

**1)** Trouver la loi conjointe de $(X, Y)$.

**2)** Donner la loi de $X$.

**3)** Calculer $E(X)$.

**Exercice 88** ( ★☆☆) Soit $(X_n)$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes la même loi
uniforme sur $\{1, ..., N\}$. On pose $S_n = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n}(X_k)$ et $T_n = \min\limits_{1 \leqslant k \leqslant n}(X_k)$.

**1)** $S_n$ et $T_n$ sont-elles indépendantes ?

**2)** Exprimer $E(T_n)$ à l'aide d'une somme que l'on ne calculera pas.

**3)** En déduire sa limite quand $n \to +\infty$.

**Exercice 89** ( ★☆☆) Soient $n$ et $N$ des entiers tels que $1 \leqslant n \leqslant N$. Soit une urne contenant $N$ boules numérotées de 1 à $N$.
On tire de manière simultanée et uniforme $n$ boules.
On note $X$ la variable aléatoire donnant le plus grand numéro de boule obtenu.

**1)** Déterminer la loi de $X$.

**2)** Montrer que $\displaystyle\sum_{k=n}^{N} \binom{k}{n} = \binom{N+1}{n+1}$.

**3)** En déduire $E(X)$.

**Exercice 90** ( ★★☆)

Une urne contient $n$ boules blanches et $n$ boules noires. On tire les boules de l'urne deux par deux. Quelle est la probabilité d'avoir à chaque tirage une boule blanche et une boule noire ?

**Exercice 91** ( ★★☆)

Soient $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $1 \leqslant m \leqslant n$, $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Calculer $E(\frac{X_1+\cdots+X_m}{X_1+\cdots+X_n})$.

**Exercice 92** ( ★★☆)

Soit $(A_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ une famille finie d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, T, P)$. Montrer que $P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \leqslant P(A_1) + \cdots + P(A_n) \leqslant P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) + n - 1$.

**Exercice 93** ( ★★☆)

– Ruine du joueur –

Les joueurs $A$ et $B$ possèdent $N$ billes. Au départ, le joueur $A$ possède $n \in \{0, \ldots, N\}$ billes et le joueur $B$ les $N - n$ billes restantes. À chaque partie, le perdant donne une bille à l'autre. Le joueur $A$ gagne chaque partie avec la probabilité $p \in ]0, 1[$. La partie s'arrête lorsque l'un des joueurs a toutes les billes. Déterminer la probabilité $a_n$ que $A$ l'emporte.

**Exercice 94** ( ★★☆)

Soit $X$ une variable aléatoire. On dit que $X$ est décomposable s'il existe deux variables aléatoires indépendantes $Y$ et $Z$ telles que $Y + Z$ ait la même loi que $X$.

**1)** Si $X$ est décomposable, donner une relation entre $G_X$, $G_Y$, $G_Z$.

**2)** Soient $n \geqslant 2$ et $p \in ]0, 1[$. Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$, montrer que $X$ est décomposable.

**3)** Soit $n \geqslant 2$ non premier. On suppose que $X$ suit une loi uniforme sur $\{0, \ldots, n-1\}$. Montrer qu'il existe $r, s \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ tels que $\forall t \in \mathbb{R},\ G_X(t) = (\frac{1}{r}\sum_{i=0}^{r-1} t^i)(\frac{1}{s}\sum_{j=0}^{s-1} t^{rj})$. En déduire que $X$ est décomposable.

**Exercice 95** ( ★☆☆)

Soit $X$ une variable telle que $X(\Omega) = \mathbb{Z}$. On pose $X^+ = \max(X, 0)$ et $X^- = \min(X, 0)$.

**1)** Montrer que $X^+$ et $X^-$ sont des variables aléatoires.

**2)** Expliciter la loi conjointe de $(X^+, X^-)$. Ces deux variables sont-elles indépendantes ?

**Exercice 96 ( ★★★)**

Soit $X$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que sa fonction génératrice $G$ vérifie

— le rayon de convergence $R$ est strictement supérieur à 1,

— pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $\sqrt{x^2+y^2} < R$, $G(x)G(y) = \frac{1}{2}G(\sqrt{x^2+y^2}\,)$.

**1)** Déterminer $G(0)$.

**2)** Montrer que, pour tout $k \geqslant 1$, $P(X = 2k+1) = 0$.

**3)** Trouver une équation différentielle satisfaite par $G$ dont les coefficients seront exprimés grâce à $x$ et $G'(1)$.

**4)** Déterminer $G$ puis en déduire l'espérance et la variance de $X$.

**Exercice 97 ( ★★★)**

Soit $T$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(T \geqslant n) > 0$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $\theta_n = P(T = n \mid T \geqslant n)$.

**1)** Montrer que les $\theta_n$ sont dans $[0, 1[$.

**2)** Exprimer $P(T \geqslant n)$ en fonction des $\theta_k$. Montrer que la série $\sum \theta_n$ diverge.

**3)** Réciproquement, si $(\theta_n)$ est une suite d'éléments de $[0, 1[$ telle que la série $\sum \theta_n$ diverge, montrer qu'il existe une variable aléatoire $T$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $P(T \geqslant n) > 0$ et $P(T = n \mid T \geqslant n) = \theta_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**Exercice 98 ( ★☆☆)**

Soient $X_n$ et $Y_n$ deux variables aléatoires suivant des lois uniformes sur $\{1, \ldots, n\}$ et indépendantes. On pose $Z_n = |X_n - Y_n|$ et $T_n = \min\{X_n, Y_n\}$. Calculer $E(Z_n)$ et $E(T_n)$. Déterminer des équivalents de $E(Z_n)$ et $E(T_n)$ lorsque $n \to +\infty$.

**Exercice 99 ( ★★☆)**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines $n$-ièmes de l'unité. On choisit suivant une loi uniforme un élément de $\mathbb{U}_n$. Soit $\theta$ la variable aléatoire indiquant l'argument appartenant à $[0, 2\pi[$ du nombre choisi, $X$ celle indiquant sa partie réelle et $Y$ celle indiquant sa partie imaginaire.

**1)** Calculer $E(\theta)$, $E(X)$ et $E(Y)$.

**2)** Calculer $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

**3)** Les variables aléatoires $X$ et $Y$ sont elles indépendantes ?

**Exercice 100 ( ★★☆)**

Soit $X$ une variable aléatoire aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On définit $Y$ de la façon suivante : si la valeur prise par $X$ est paire, $Y = \frac{X}{2}$, si la valeur prise par $X$ est impaire, $Y = 0$. Donner la loi de $Y$, son espérance et sa variance.

**Exercice 101 ( ★☆☆)**

Soit $X$ une variable aléatoire telle que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(X = k) = \frac{k-1}{2^k}$.

**1)** Vérifier par le calcul que $\sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) = 1$.

**2)** Donner la fonction génératrice de $X$. Quel est son rayon de convergence ?

**3)** La variable $X$ admet-elle une espérance finie ? Si oui, que vaut-elle ?

**Exercice 102 ( ★☆☆)**

Les variables aléatoires $X_1$ et $X_2$ suivent des lois de Poisson de paramètres respectifs $\lambda_1$ et $\lambda_2$, la variable aléatoire $Y$ prend ses valeurs dans $\{-1, 1\}$. On suppose que les variables aléatoires $X_1$, $X_2$ et $Y$ sont indépendantes. On pose $p = P(Y = -1)$. On considère

$$M = \begin{pmatrix} X_1^2 & X_2^2 \\ YX_2^2 & X_1^2 \end{pmatrix}.$$

**1)** Déterminer la probabilité pour que $M$ soit diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

**2)** Déterminer la probabilité pour que les valeurs propres de $M$ soient réelles.