Exercices de préparation aux oraux
À préparer à la maison

I. Algèbre

Exercice 1 (★☆☆) Puisque $\deg P = n$, la famille $\mathscr{B} = (P, P', \ldots, P^{(n)})$ est une base de $\mathbb{R}[X]$. D'après la formule de Taylor pour les polynômes, $P(X + a_j) = \sum_{i=0}^{n} \frac{a_j^i}{i!} P^{(i)}(X)$ donc le déterminant de $(P(X + a_0), P(X + a_1), \ldots, P(X + a_n))$ dans $\mathscr{B}$ est

$$\left(\prod_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}\right) V(a_0, \ldots, a_n)$$

où V désigne le déterminant de Vandermonde, qui est non nul car les a_k sont deux à deux distincts.

Exercice 2 (★★★)

1) Soient $\alpha_1, \cdots, \alpha_q$ les racines strictement positives de P. P étant continue et dérivable, par le théorème de Rolle, P' admet une racines sur tout intervalle $]\alpha_k, \alpha_{k+1}[$ ce qui localise déjà $p - 1$ racines donc $Z(P') \geqslant Z(P) - 1$.

2) On va commencer par supposer que $n_1 = 0$. On désigne par $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$ les racines strictement positives de P et par $k_1, \ldots, k_q$ leurs multiplicités respectives. On va étudier le nombre de racines de P' situées sur un intervalle de $\mathbb{R}^+$ sur chaque intervalle ouvert défini par deux racines de P. On va utiliser la propriété qu'un polynôme ne change de signe qu'en ses racines de multiplicité impaire. En posant $\alpha_0 = 0$ et $\alpha_{p+1} = +\infty$, on désigne par b_k le nombre de racines de P' comptées avec leur multiplicité sur l'intervalle $]\alpha_k, \alpha_{k+1}[$.

• Chaque racine α_j est une racine d'ordre $k_j - 1$ de P'.
• Sur un intervalle $]\alpha_k, \alpha_{k+1}[$, P étant de signe constant, P' est du signe de P en α_k^+ et de signe opposé en α_k^+ et en α_{k+1}^-. P' a donc sur un tel intervalle un nombre impair de racines de multiplicité impaire donc b_k est impair.
• Sur l'intervalle $]\alpha_q, +\infty[$, P est du signe de son terme dominant donc de a_p : P' est du signe de P en α_k^+ et au voisinage de l'infini donc le nombre de racines de P' de multiplicité impaire est pair : b_q est donc pair.
• En 0^+, P est du signe de a_1 et comme on a supposé $n_1 = 0$, P' a le signe de a_2 en 0^+ et en α_1^-, P' est du signe de $-P$, aussi si $a_1a_2 > 0$, P' change de signe entre les deux extrémités de l'intervalle donc b_0 est impair et si $a_1a_2 < 0$, b_0 est pair. Posons $v = 1$ si $a_1a_2 < 0$ et $v = 0$ si $a_1a_2 > 0$, on a ainsi prouvé que $b_0 + v$ est pair.
• On a ainsi :

$$Z(P')+v = \sum_{j=1}^{q}(k_j-1)+\sum_{j=1}^{q-1} b_k+b_q+b_0+v = Z(P)+\sum_{j=1}^{q-1}(b_k-1)+b_q+b_0+v$$

ce qui prouve que $Z(P') + v - Z(P)$ est pair.
Diviser par X^{n_1} ne change ni $V(P)$ ni $Z(P)$. Ainsi si $P = a_1X^{n_1} + a_2X^{n_2} + \cdots + a_pX^{n_p}$, $P_0 = a_1 + a_2X^{n_2-n_1} + \cdots + a_pX^{n_p-n_1}$ et $P_1 = P_0' = a_2(n_2-n_1)X^{n_2-n_1}+\cdots+a_p(n_p-n_1)X^{n_p-n_1}$, on a $V(P_0) = V(P)$, $Z(P) = Z(P_0)$. De plus, comme les nombres $b_i = (n_i-n_1)a_i$ et a_i sont de même signe car $n_i > n_1$, on remarque que $V(P) = v+V(P_1)$. Ce qui précède prouve donc que $Z(P_1) - V(P_1) - (Z(P) - V(P))$ est pair : les deux nombres $Z(P_1) - V(P_1)$ et $Z(P) - V(P)$ sont donc de même parité.

Il suffit de terminer par une récurrence portant sur l'indice p du texte. Si $p = 1$, $Z(P) = V(P) = 0$ donc la différence est paire. Si la relation est vraie à l'ordre $p - 1$, en utilisant ce qui précède, $Z(P) - V(P)$ a la parité de $Z(P_1) - V(P_1)$ qui est pair par hypothèse de récurrence.

Exercice 3 (★★☆)

1) Multiplicité impaire : changement de signe au voisinage de la racine.

2) Évident.

Il suffit de voir par le module que $(S^2+T^2)(S_1^2+T_1^2)$ s'écrit comme somme de deux carrés.

Exercice 4 (★★☆) Soit H un supplémentaire de G dans E (qui existe car E est de dimension finie). On considère l'application

$$\begin{array}{rcccl} \varphi & : & \mathscr{L}(H,F) & \to & \mathscr{L}(E,F) \\ & & u & \mapsto & (x=y+z\mapsto u(z)), \end{array}$$

où $x=y+z$ est l'unique décomposition d'un vecteur de E sous la forme d'une somme $y+z$ avec $y\in G$ et $z\in H$. Voici trois propriétés de φ qui résolvent l'exercice.

— Elle est linéaire : si u et v sont deux éléments de $\mathscr{L}(H,F)$, si α et β sont deux scalaires, si $x=y+z$ est un vecteur quelconque de E décomposé suivant la somme directe $G\oplus H$, alors

$$\varphi(\alpha u+\beta v)(x)=(\alpha u+\beta v)(z)=\alpha u(z)+\beta v(z)$$

$$=\alpha\varphi(u)(x)+\beta\varphi(v)(x)=[\alpha\varphi(u)+\beta\varphi(v)](x),$$

ce qui prouve que les applications linéaires $\varphi(\alpha u+\beta v)$ et $\alpha\varphi(u)+\beta\varphi(v)$ sont les mêmes.

— Son image est A : en effet, pour toute $u\in\mathscr{L}(E,F)$ et tout $y\in G$, on a $\varphi(u)(y)=\varphi(u)(y+0)=u(0)=0$, ce qui montre que $G\subset\operatorname{Ker}u$, donc que $\varphi(u)\in A$, donc que $\operatorname{Im}\varphi\subset A$. Réciproquement, si $v\in A$, l'application $u=v_{/H}$ appartient bien à $\mathscr{L}(H,F)$ et vérifie $\varphi(u)=v$. On en déduit que A est un sous-espace vectoriel, en tant qu'image d'un espace vectoriel par une application linéaire.

— Elle est injective : en effet, si $\varphi(u)=0$, cela signifie que $u(z)=0$ pour tout $z\in H$, c'est-à-dire que u est l'application nulle sur H, donc est l'élément nul de $\mathscr{L}(H,F)$. Il en résulte que la corestriction de φ à son image, qui est A, est un isomorphisme, et on en déduit que

$$\dim A=\dim\mathscr{L}(H,F)=(\dim E-\dim G)\dim F.$$

Exercice 6 (★★☆) Commençons par un résultat simple : si $P\in\mathbb{R}_n[X]$ non nul, on note $P^{[1]}(X)=P(X+1)-P(X)$. Alors, en comparant les termes dominants dans chaque membre, on montre que $\deg P^{[1]}=\deg P-1$.

Par récurrence, si $k\in[\![1,n-1]\!]$, on note $P^{[k+1]}=\left(P^{[k]}\right)^{[1]}$.

Alors si $k\leqslant n$, $\deg P^{[k]}=\deg P-k$, et $P^{[n+1]}=0$.

Appliquons cela ici : commençons, dans A, par soustraire la colonne j à la colonne $(j+1)$ pour j de 1 à $n-1$. La 1ère colonne de A est inchangée, mais si $j\in[\![2,n]\!]$, la colonne j vaut alors $\left(P^{[1]}(x+j+i-2)\right)_{1\leqslant i\leqslant n+1}$.
Sur la nouvelle matrice obtenue, réitérons cette opération : on soustrait la colonne j à la colonne $(j+1)$ pour j de 2 à $n-1$.
Et ainsi de suite : à la k ème itération on soustrait la colonne j à la colonne $(j+1)$ pour j de k à $n-1$.
Au bout de $(n-1)$ itérations, on obtient la matrice A' dont la colonne j vaut $\left(P^{[j-1]}(x+j+i-2)\right)_{1\leqslant i\leqslant n+1}$ pour j de 2 à n. Sa dernière colonne est nulle, donc $0=\det A'=\det A$, d'où le résultat.

Exercice 7 (★★☆)

1) $P=(-1)^n\chi_A(-x)$.

2) Question pénible. On prend $A+a_i\mathrm{Id}$, on retranche la 1ère ligne à toutes les autres, on développe par rapport à la i-ème colonne, et on redéveloppe le résultat par rapport à la $(k-1)$-ème ligne. On trouve
$$P(a_i)=a_i\prod_{k=1,\ k\neq i}^{n}(a_i-a_k).$$

3) On note $Q=\sum_{i=1}^{n}X\prod_{k=1,\ k\neq i}^{n}(X-a_k)$, alors $P-Q$ est de degré n, de coefficient dominant $1-n$, et s'annule en $a_1,\dots,a_n$, donc $P-Q=(1-n)\prod_{k=1}^{n}(X-a_k)$, donc

$$P=(1-n)\prod_{k=1}^{n}(X-a_k)+\sum_{i=1}^{n}X\prod_{k=1,\ k\neq i}^{n}(X-a_k).$$

4) Après simplification on trouve

$$\frac{P(X)}{(X-a_1)\cdots(X-a_n)} = (1-n) + \sum_{i=1}^{n} \frac{X}{X-a_i}.$$

5) $\det(A+\mathrm{I}_n) = P(1) = (1-n)\prod_{k=1}^{n}(1-a_k) + \sum_{i=1}^{n}\prod_{k=1,\ k\neq i}^{n}(1-a_k)$.

Exercice 11 (★☆☆)

1) Posons P_n la partie principale du DL de $\sqrt{1+x}$ en 0 à l'ordre n : $\sqrt{1+x} = P_n(x) = o(x^n)$. Puisque l'on sait que le terme constant de P_n vaut 1, alors $(P_n(x) = o(x^n))^2 = P_n^2(x) + o(x^n)$, donc $1 + x - P_n^2(x) = o(x^n)$. Ainsi le polynôme $1 + x - P_n^2(x)$ n'a pas de terme de degré $\leqslant n$, donc il est divisible par x^{n+1}.

2) Il existe un polynôme Q tel que $X^{n+1}Q = 1 + X - P_n^2(X)$. On évalue en N, et comme $N^{n+1} = 0$ (résultat classique pour une matrice nilpotente), $\mathrm{I}_n + N - P_n^2(N) = 0$. Il suffit de poser $B = P_n(N)$.

Exercice 14 (★★★)

1) Cours : toutes les valeurs propres sont strictement positives.

2) Soit p l'ordre de B et q celui de D. B est symétrique car A l'est. Donc elle est diagonalisable. Soit x un vecteur propre de B, on pose $X = (x, 0_q)$ (le comprendre comme un vecteurs par blocs, constitué de deux blocs de taille p et q). Alors en effectuant un produit par blocs, $X^\top AX = x^\top Bx > 0$. Donc B est définie positive et $\det B > 0$. Idem avec D.

3) Résultat classique : il existe B_1 et D_1 symétriques définies positives telle que $B = B_1^2$ et $D = D_1^2$. Posons $Q = \mathrm{diag}(B_1^{-1}, D_1^{-1})$. Alors $QAQ = \begin{pmatrix} \mathrm{I} & B_1^{-1}CD_1^{-1} \\ D_1^{-1}C^\top B_1^{-1} & \mathrm{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{I} & E \\ E^\top & \mathrm{I} \end{pmatrix} = M$.

Donc $\det M = (\det Q)^2 \det A = \dfrac{\det A}{\det(B)\det(D)}$. Il s'agit donc de montrer que $\det M \leqslant 1$.

On remarque que $\begin{pmatrix} \mathrm{I} & 0 \\ -E^\top & \mathrm{I} \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} \mathrm{I} & E \\ 0 & \mathrm{I} - E^\top E \end{pmatrix}$, d'où l'on tire $\det M = \det(\mathrm{I} - E^\top E)$. Or $E^\top E$ est symétrique positive, donc diagonalisable à valeurs propres réelles dans $\mathbb{R}_+$. Alors $\mathrm{I} - E^\top E$ est diagonalisable à valeurs propres dans $]-\infty, 1]$.
Montrons que les valeurs propres de $E^\top E$ sont inférieures ou égales à 1. Si l'on y parvient, alors les valeurs propres de $\mathrm{I} - E^\top E$ seront dans $[0, 1]$, et on aura fini.
Par l'absurde, soit $\lambda > 1$ une valeur propre de $E^\top E$, et Z tel que $E^\top EZ = \lambda Z$. Posons $\mu = -\sqrt{\lambda} < 1$. Alors $\dfrac{1}{\mu}E^\top EZ = \mu Z$ et $\dfrac{1}{\mu}E^\top EZ + Z = (\mu+1)Z$. Posons $Y = \dfrac{1}{\mu}EZ$, donc $EZ = \mu Y$ et $E^\top Y = \mu Z$. Posons enfin $X = \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix}$, alors $MX = \begin{pmatrix} Y + EZ \\ E^\top Y + Z \end{pmatrix} = (\mu+1)X$ et donc M a une valeur propre réelle strictement négative. Mais $M = QAQ = QAQ^\top$ est symétrique définie positive car A l'est. D'où le résultat.

Exercice 16 (★☆☆) Analyse. Si $M^2 = M$ et $M^\top M = MM^\top$, alors la matrice $N = M^\top M = MM^\top$ est symétrique et vérifie $N^2 = N$, donc N est la matrice d'une projection orthogonale.

Or $\mathrm{Ker}(M) = \mathrm{Ker}(N)$ (une inclusion évidente et l'autre via $X^\top NX = \|MX\|^2$) et $\mathrm{Im}(N) \subset \mathrm{Im}(M)$, donc $\mathrm{Im}(N) = \mathrm{Im}(M)$ au vu des dimensions (et du théorème du rang).

On en déduit que M est la matrice d'une projection orthogonale (et que $N = M$).

Synthèse. Réciproquement, il est clair que toute matrice de projection orthogonale convient (car alors $M^\top = M$).

Conclusion. Les matrices cherchées sont les matrices de projections orthogonales.

Exercice 17 (★★☆)

$\Longrightarrow$ On suppose $E = F \overset{\perp}{\oplus} G$. Soit $x \in E$, $x = p_F(x) + p_G(x)$, $p_F(x) \perp p_G(x)$, $d(x, F) = \|x - p_F(x)\| = \|p_G(x)\|$ et $d(x, G) = \|x - p_G(x)\| =$

$\|p_F(x)\|$. Avec Pythagore, on a $\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \|p_G(x)\|^2 = d^2(x,F) + d^2(x,G)$.

$\Longleftarrow$
- Il est immédiat (mais pas très utile compte tenu de la suite) que $F \cap G = \{0\}$: soit $x \in F \cap G$, $\|x\|^2 = d^2(x,F) + d^2(x,G) = 0 + 0 = 0$ donc $x = 0$.
- $F \perp G$: soient $x \in F$, $y \in G$ et $z = x + y$. On a $d(z,F) = \|z - p_F(z)\| \leqslant \|z - x\| = \|y\|$ et de même $d(z,g) \leqslant \|x\|$. Alors $\|z\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x \mid y\rangle \leqslant \|x\|^2 + \|y\|^2$, d'où $\langle x \mid y\rangle \leqslant 0$. On a de même $\langle x \mid -y\rangle \leqslant 0$ donc $\langle x \mid y\rangle = 0$ donc $F \perp G$.
- On montre que $F \oplus G = E$ en prouvant que $(F \oplus G)^\perp = \{0\}$. Soit $x \in (F \oplus G)^\perp$. Les projetés orthogonaux de x sur F, G et $F \oplus G$ sont égaux et nuls. Ainsi, $d(x,F) = d(x,G) = \|x\|$, il s'ensuit que $\|x\|^2 = 2\|x\|^2$ donc que $x = 0$, ce qui prouve que

$$E = F \overset{\perp}{\oplus} G.$$

Exercice 18 (★★☆) On suppose que $n = \dim E \geqslant 2$ dans tout l'exercice (si $n = 1$, l'endomorphisme f_α s'identifie à $x \mapsto (1+\alpha)x$ via l'isométrie entre E et $\mathbb{R}$ consistant à envoyer a sur 1, et les réponses sont immédiates : $\alpha \neq -1$ pour la première question, tout vecteur non nul est propre pour la valeur propre $1+\alpha$ pour la deuxième, $\alpha = -2$ pour la troisième, et enfin tout endomorphisme est symétrique pour la dernière).

1) Soit $x \in E$. Alors

$$\begin{aligned} f_\alpha \circ f_\beta(x) &= f_\beta(x) + \alpha\langle a, f_\beta(x)\rangle a = x + \beta\langle a,x\rangle a + \alpha\langle a, x + \beta\langle a,x\rangle a\rangle a \\ &= x + \beta\langle a,x\rangle a + \alpha\langle a,x\rangle a + \alpha\beta\langle a,x\rangle\langle a,a\rangle a \\ &= x + \beta\langle a,x\rangle a + \alpha\langle a,x\rangle a + \alpha\beta\langle a,x\rangle a \\ &= x + (\alpha+\beta+\alpha\beta)\langle a,x\rangle a. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$f_\alpha \circ f_\beta = f_{\alpha+\beta+\alpha\beta}.$$

Si $\alpha = -1$, on reconnaît dans l'expression de f_{-1} que f_{-1} est le projecteur orthogonal sur l'hyperplan orthogonal à a, qui n'est pas bijectif (de noyau $\mathrm{Vect}(a)$).

Sinon, le calcul ci-dessus montre que $f_\alpha \circ f_{-\alpha/(1+\alpha)} = \mathrm{Id}_E$, donc que f_α admet un inverse à droite, donc un inverse (car E est de dimension finie, puisqu'il est euclidien).

2) Si $\alpha = 0$, alors $f_\alpha = f_0 = \mathrm{Id}_E$. Les réponses sont claires : $\mathrm{Sp}(f_0) = \{1\}$ et $E_1(f_0) = E$

Sinon, on pose $H = a^\perp$, et on constate que $f\alpha(x) = x \iff x \in H$, donc que 1 est valeur propre de multiplicité au moins $n-1$ et que $E_1(f_\alpha) = H$. De plus, $f_\alpha(a) = (1+\alpha)a$. Comme $a \notin H$, on en déduit que

$$\mathrm{Sp}(f_\alpha) = \{1, 1+\alpha\}, \quad E_1(f_\alpha) = H = a^\perp \quad E_{1+\alpha}(f_\alpha) = \mathrm{Vect}(a).$$

3) Soient x et y deux vecteurs de E. Alors

$$\begin{aligned} \langle f_\alpha(x), f_\alpha(y)\rangle &= \langle x + \alpha\langle a,x\rangle a, y + \alpha\langle a,y\rangle a\rangle \\ &= \langle x,y\rangle + 2\alpha\langle a,x\rangle\langle a,y\rangle + \alpha^2\langle a,x\rangle\langle a,y\rangle\|a\|^2 \\ &= \langle x,y\rangle + \alpha(2+\alpha)\langle a,x\rangle\langle a,y\rangle. \end{aligned}$$

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On sait que $u \in \mathrm{O}(E) \iff \forall (x,y) \in E^2,\ \langle u(x), u(y)\rangle = \langle x,y\rangle$ (c'est une des définitions possibles). On en déduit que $f_\alpha \in \mathrm{O}(E) \iff \forall (x,y) \in E^2,\ \alpha(2+\alpha)\langle a,x\rangle\langle a,y\rangle = 0$. En appliquant cette condition avec $x = y = a$, on obtient la condition nécessaire

$$\alpha(\alpha+2) = 0,$$

et il est clair que cette condition est aussi suffisante. On conclut que f_α est un automorphisme orthogonal de E si et seulement si $\alpha = 0$ (auquel cas, $f_\alpha = f_0 = \mathrm{Id}_E$) ou $\alpha = -2$ (et on reconnaît dans f_{-2} la réflexion orthogonale par rapport à l'hyperplan $a^\perp$).

4) L'endomorphisme $p_a \colon x \in E \mapsto \langle a,x\rangle a$ est le projecteur orthogonal sur la droite $\mathrm{Vect}(a)$: le cours affirme que c'est un endomorphisme symétrique. Alors $f_\alpha = \mathrm{Id}_E + \alpha p_a$ est une combinaison linéaire d'endomorphismes symétriques : c'est donc un endomorphisme symétrique, toujours d'après le cours, et ceci quelle que soit la valeur de α.

Exercice 20 (★ ★ ☆) La réponse est

$$U = V.$$

La condition est clairement suffisante car si $U = V$ on a $\frac{1}{6}(U + 5V) = U \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

Réciproquement supposons que U, V et $W = \frac{1}{6}(U + 5V)$ appartiennent à $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. On utilise le produit scalaire canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ pour lequel une matrice orthogonale est de norme $\sqrt{n}$. On a donc $\|\frac{1}{6}(U + 5V)\| = \|U\| = \|V\| = \sqrt{n}$. Il y a donc égalité dans l'inégalité triangulaire :

$$\sqrt{n} = \left\|\frac{1}{6}(U + 5V)\right\| \leqslant \left\|\frac{1}{6}U\right\| + \left\|\frac{5}{6}V\right\| = \frac{1}{6}\|U\| + \frac{5}{6}\|V\| = \sqrt{n}.$$

Or pour une norme *euclidienne*, l'égalité dans l'inégalité triangulaire se produit si et seulement si les deux vecteurs sont positivement colinéaires : il existe donc un réel $\lambda \geqslant 0$ tel que $\frac{1}{6}U = \lambda\frac{5}{6}V$ et (norme) $\frac{1}{6} = \frac{5}{6}\lambda$, donc $U = V$.

Généralisation : si $t \in]0, 1[$ et $W = (1 - t)U + tV$ alors

$$W \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \iff U = V.$$

Exercice 21 (★ ★ ☆) Soit $A = (a_{i,j})$ une telle matrice. Les colonnes [resp. lignes] étant normées, $\forall i, j \in [\![1\,;\,n]\!]$, $|a_{i,j}| \leqslant 1$ donc $a_{i,j} = 0, 1$ ou -1, et donc un seul terme par colonne [resp. ligne] est non nul et vaut ± 1. La matrice de terme général $|a_{i,j}|$ est donc une matrice de permutation il y en a $\operatorname{Card} S_n = n!$, chaque telle matrice fournissant 2^n possibilités pour placer les signes $-$. Au total donc, il y a $2^n n!$ matrices ne comportant qu'un seul terme non nul sur chaque colonne et chaque ligne, ce terme étant ± 1 et il est clair qu'une telle matrice est dans $\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \cap \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$. En conclusion,

$$\operatorname{Card}\left(\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \cap \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})\right) = 2^n n!.$$

Exercice 22 (★ ☆ ☆)

1) Si X et Y désignent les vecteurs colonnes des composantes de x et y dans la base canonique, on sait que $\langle x, y\rangle = X^\top Y$. Cette interprétation et l'antisymétrie de A permettent d'écrire que

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle f(x), y\rangle = (AX)^\top Y = X^\top A^\top Y = -X^\top AY = -X^\top(AY) = -\langle x$$

2) Si λ est une valeur propre de f et x un vecteur propre associé, alors $\langle f(x), x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \lambda\|x\|^2$, qui est aussi égal à $-\langle x, f(x)\rangle = -\lambda\|x\|^2$. Par suite, $\lambda\|x\|^2 = 0$ et, comme x est un vecteur propre donc non nul, $\lambda = 0$. On vient de démontrer que zéro est la seule valeur propre *éventuelle* de f.

Il reste à voir que c'est effectivement une valeur propre de f. Or la dimension de E est impaire, donc le polynôme caractéristique de f, à coefficients réels et de degré impair, admet au moins une racine réelle, ce qui termine la preuve.

3) D'après la question précédente, $\det(A - I_{2n+1}) = \chi_A(1)$ et $\det(A + I_{2n+1}) = \chi_A(-1)$ ne sont pas nuls, donc les matrices correspondantes sont inversibles.

4) On calcule $B^\top B$ (le passage de la deuxième à la troisième ligne est justifié par le fait que deux polynômes en A commutent) :

$$\begin{aligned} B^\top B &= [(I_{2n+1} + A)^{-1}]^\top (I_{2n+1} - A)^\top (I_{2n+1} - A)(I_{2n+1} + A)^{-1} \\ &= (I_{2n+1} - A)^{-1}(I_{2n+1} + A)(I_{2n+1} - A)(I_{2n+1} + A)^{-1} \\ &= (I_{2n+1} - A)^{-1}(I_{2n+1} - A)(I_{2n+1} + A)(I_{2n+1} + A)^{-1} \\ &= I_{2n+1}. \end{aligned}$$

Ceci prouve que $B \in \mathrm{O}_{2n+1}(\mathbb{R})$, et on sait alors que $\det(B) = \pm 1$. Mais $\det(B)$ vaut aussi $\frac{\det(I_{2n+1} - A)}{\det(I_{2n+1} + A)}$ avec $\det(I_{2n+1} + A) = \det((I_{2n+1} + A)^\top) = \det(I_{2n+1} - A)$, donc

$$\det B = 1.$$

Exercice 23 (★ ★ ☆)

1) Si p est un projecteur orthogonal, alors $p^* = p$ et $p \circ p = p$, donc $\alpha(p) = \operatorname{tr}(p) = \operatorname{rg}(p)$.

2) Soit p un projecteur quelconque de rang r. Soit $(e_1, \ldots, e_r)$ une base orthonormale de $\mathrm{Im}(p)$, complétée en une base orthonormale $\mathscr{B}$ de E. La matrice M de p dans $\mathscr{B}$ est de la forme

$$M = \begin{pmatrix} I_r & A \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

et comme $\mathscr{B}$ est orthonormale, la matrice de p^* dans $\mathscr{B}$ est

$$M^\top = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ A^\top & B^\top \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$M^\top M = \begin{pmatrix} I_r & A \\ A^\top & A^\top A + B^\top B \end{pmatrix}$$

et $\alpha(p) = \mathrm{tr}\,(p^* \circ p) = \mathrm{tr}\,(M^\top M) = r + \mathrm{tr}\,(A^\top A) + \mathrm{tr}\,(B^\top B)$. On en déduit que

$$\alpha(p) \geqslant r,$$

puisque $\mathrm{tr}\,(A^\top A) \geqslant 0$ et $\mathrm{tr}\,(B^\top B) \geqslant 0$.
De plus, l'égalité est réalisée si et seulement si $\mathrm{tr}\,(A^\top A) = \mathrm{tr}\,(B^\top B) = 0$, i.e. si et seulement si A et B sont nulles. Vu la définition de M, on voit donc que l'égalité $\alpha(p) = r$ est réalisée si et seulement si p est une projection orthogonale.

Exercice 26 (★★☆) Si A est symétrique réelle et si $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ diagonalise A, alors, quitte à changer la dernière colonne de P en son opposé, on peut supposer que P est la matrice d'une rotation.

Ici, si D est la matrice diagonale des valeurs propres, on a $A = PDP^{-1}$ et $B = QDQ^{-1}$, avec P et Q matrices de rotations. Par conséquent, la matrice $QP^{-1} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ convient.

Exercice 27 (★★☆) On note u l'endomorphisme canoniquement associé à A, et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de vecteurs propres de u, avec $u(e_i) = \lambda_i e_i$ pour tout i.

1) Soient $x \in \mathbb{R}^n$ de norme 1, et $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ les composantes de x sur $\mathscr{B}$. Alors

$$\langle u(x), x\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \geqslant \lambda_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \lambda_1,$$

donc λ_1 est bien un minorant de l'ensemble $\{\langle Ax, x\rangle,\ x \in \mathbb{R}^n \text{ et } \|x\| = 1\}$. D'autre part, $\langle u(e_1), e_1\rangle = \lambda_1$, donc λ_1 appartient à l'ensemble en question. On en déduit que

$$\lambda_1 = \min\{\langle Ax, x\rangle,\ x \in \mathbb{R}^n \text{ et } \|x\| = 1\}.$$

2) D'après la première inégalité de la question précédente — les notations sont les mêmes —, si $\langle u(x), x\rangle = \lambda_1$, alors $\displaystyle\sum_{i=1}^n (\lambda_i - \lambda_1) x_i^2 = 0$. Comme il s'agit d'une somme de nombres positifs, elle ne peut être nulle que si tous les nombres en jeu sont nuls :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad (\lambda_i - \lambda_1) x_i^2 = 0.$$

Notons m_1 la multiplicité de λ_1, qui est aussi la dimension de $E_{\lambda_1}(u)$. On a donc $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{m_1} < \lambda_{m_1+1} \leqslant \cdots$. La condition $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $(\lambda_i - \lambda_1) x_i^2 = 0$ est donc équivalente à $\forall i \in [\![m_1+1, n]\!]$, $x_i^2 = 0$, ou encore à $x \in E_{\lambda_1}(u)$. On a bien

$$Ax = \lambda_1 x.$$

3) On a $\|x\|^2 = \|x^+\|^2 + \|x^-\|^2$ et

$$\lambda_1 \|x\|^2 = \langle Ax, x\rangle = \langle Ax^+, x^+\rangle + \langle Ax^-, x^-\rangle - 2\langle Ax^+, x^-\rangle.$$

On en déduit que

$$\langle Ax^+, x^-\rangle = \frac{1}{2}\Big(\langle Ax^+, x^+\rangle + \langle Ax^-, x^-\rangle - \lambda_1 \|x\|^2\Big) \geqslant \frac{1}{2}\Big(\lambda_1 \|x^+\|^2 + \lambda_1 \|x^-\|^2 - \lambda$$

Exercice 28 (★★★) On commence par reformuler l'exercice dans $\mathscr{L}(E)$, où $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ est un espace euclidien de dimension n. Soit u un endomorphisme de E, symétrique, de valeurs propres $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant$

λ_n répétées avec leur ordre de multiplicité. La première question fait démontrer le théorème de Courant et Fischer :

$$\lambda_k = \min_{F \text{ sev de } E, \dim F = k} \left(\max_{x \in F,\ \|x\|=1} \langle u(x), x\rangle \right) = \max_{F \text{ sev de } E, \dim F = n-k+1} \left(\min_{x \in F,\ \|x\|=1} \langle u(x), x\rangle \right).$$

Seule la première égalité était demandée dans l'énoncé tel qu'il a paru, alors que les deux sont nécessaires. Comme F est de dimension finie dans les deux expressions ci-dessus, la sphère unité $\{x \in F,\ \|x\| = 1\}$ de F est compacte, donc l'application continue $x \mapsto \langle u(x), x\rangle$ y est bornée et atteint ses bornes, ce qui justifie l'usage du maximum et du minimum « intérieurs » dans les expressions ci-dessus.

On notera $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de vecteurs propres de u, avec $u(e_i) = \lambda_i e_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

1) On pose $F_k = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ et $F_k^* = \mathrm{Vect}(e_k, \dots, e_n)$, qui sont deux sous-espaces vectoriels de E de dimensions respectives k et $n - k + 1$.

— Si $x = \sum_{i=1}^{k} x_i e_i \in F_k$ est de norme 1, on a $\langle u(x), x\rangle = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i^2 \leqslant \lambda_k \sum_{i=1}^{k} x_i^2 = \lambda_k$ et $\langle u(e_k), e_k\rangle = \lambda_k$, donc $\lambda_k = \max_{x \in F_k,\ \|x\|=1} \langle u(x), x\rangle$.

— De même, si $x = \sum_{i=k}^{n} x_i e_i \in F_k^*$ est de norme 1, on a $\langle u(x), x\rangle = \sum_{i=k}^{n} \lambda_i x_i^2 \geqslant \lambda_k \sum_{i=k}^{n} x_i^2 = \lambda_n$ et $\langle u(e_k), e_k\rangle = \lambda_k$, donc $\lambda_k = \min_{x \in F_k^*,\ \|x\|=1} \langle u(x), x\rangle$.

Soit maintenant F un sous-espace quelconque de E de dimension k. Comme $\dim F + \dim F_k^* = k + (n - k + 1) = n + 1 > n$, il est impossible que F et F_k^* soient en somme directe, donc $F \cap F_k^*$ contient au moins un vecteur y de norme 1 (au moins deux en fait). Comme $y \in F_k^*$, il vérifie $\langle u(y), y\rangle \geqslant \lambda_k$, et par conséquent

$$\max_{x \in F,\ \|x\|=1} \langle u(x), x\rangle \geqslant \lambda_k.$$

On en déduit que l'ensemble $\{\max_{x \in F,\ \|x\|=1} \langle u(x), x\rangle,\ \dim F = k\}$ est minoré par λ_k (et bien sûr non vide). Il admet donc une borne inférieure qui est plus grande que λ_k :

$$\inf_{F \text{ sev de } E, \dim F = k} \left(\max_{x \in F,\ \|x\|=1} \langle u(x), x\rangle \right) \geqslant \lambda_k.$$

Comme par ailleurs $\max_{x \in F_k,\ \|x\|=1} \langle u(x), x\rangle = \lambda_k$, cette borne inférieure est un minimum et vaut λ_k, ce qui établit l'égalité souhaitée :

$$\lambda_k = \min_{F \text{ sev de } E, \dim F = k} \left(\max_{x \in F,\ \|x\|=1} \langle u(x), x\rangle \right).$$

L'autre se démontre de la même façon.

2) Ce résultat est connu sous le nom de théorème d'entrelacement de Cauchy.

Soit H un hyperplan de E, et p le projecteur orthogonal sur H. Cette question revient à démontrer que les valeurs propres de l'endomorphisme (de H) $v \colon x \in H \mapsto p \circ u(x) \in H$ sont entrelacées avec celles de u [appliquer ceci avec H le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par les $n - 1$ premiers vecteurs de la base canonique $\mathscr{E} = (\varepsilon_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$: si A est la matrice de u sur $\mathscr{E}$, alors B est la matrice de v sur $(\varepsilon_i)_{1 \leqslant i \leqslant n-1}$].

On commence par remarquer que B est bien une matrice symétrique réelle, c'est-à-dire que v est un endomorphisme symétrique de H. La question précédente donne alors

$$\forall k \in [\![1, n-1]\!], \quad \mu_k = \min_{F \text{ sev de } H, \dim F = k} \left(\max_{x \in F,\ \|x\|=1} \langle v(x), x\rangle \right) = \min_{F \text{ sev de } H, \dim F = k} \Bigg($$

Comme l'ensemble des sous-espaces vectoriels de H de dimension k est inclus dans l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E de dimension k, on dispose d'une première inégalité :

$$\lambda_k \leqslant \mu_k.$$

La question précédente montre aussi (à condition d'avoir démontré la totalité du théorème de Courant et Fischer) que

$$\forall k \in [\![1, n-1]\!], \quad \mu_k = \max_{F \text{ sev de } H, \dim F = n-k} \left(\min_{x \in F,\ \|x\|=1} \langle v(x), x \rangle \right) = \max_{F \text{ sev de } H, \dim F = n-k} \left(\min_{x \in F,\ \|x\|=1} \langle u(x), x \rangle \right).$$

En effet, la dimension de H est $n-1$ et non n... Comme l'ensemble des sous-espaces vectoriels de H de dimension $n-(k+1)+1 = n-k$ est inclus dans l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E de dimension $n-k$, on dispose de la deuxième inégalité, qui achève l'exercice :

$$\mu_k \leqslant \lambda_{k+1}.$$

Exercice 29 (★★★)

1) Soit $A, B \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $a \geqslant 0$. Les matrices $A+B$ et aA sont évidemment symétriques. Pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, on a $u^\top(A+B)u = u^\top Au + u^\top Bu \geqslant 0$, et $u^\top(aA)u = au^\top Au \geqslant 0$, donc $A+B, aA \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.

2) Soit $u \in \mathbb{R}^n$ et $S = uu^\top$ (clairement symétrique). Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a $x^\top Sx = (x^\top u)(u^\top x) = \left(\sum_{i=1}^n x_i u_i\right)^2 \geqslant 0$ donc $S \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.

3) Soit M une matrice de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Si $M \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$, alors pour toute valeur propre λ de M, en considérant u un vecteur propre associé, on a $u^\top Mu = u^\top \lambda u = \lambda \|u\|^2 \geqslant 0$ donc $\lambda \geqslant 0$. Réciproquement, si toutes les valeurs propres de M sont positives, alors via le théorème spectral on peut écrire $M = P\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)P^\top$ avec P orthogonale, et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geqslant 0$. Pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, on a donc $u^\top Mu = v^\top \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)v$, où $v = P^\top u = (v_1, \dots, v_n)$. Soit $u^\top Mu = \sum_{k=1}^n \lambda_k v_k^2 \geqslant 0$, ce qui permet de conclure que $M \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.

4) Soit $A, B \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$. Posons $D_u = \mathrm{diag}(u_1, \dots, u_n)$. On a

$$u^\top A \odot Bu = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_i a_{i,j} b_{i,j} u_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [D_u A D_u]_{ij}\, b_{ij} = \langle D_u A D_u \mid B \rangle,$$

où $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire canonique sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On a donc aussi

$$u^\top A \odot Bu = \mathrm{tr}\left((D_u A D_u)^\top B \right) = \mathrm{tr}\left(D_u A^\top D_u B \right) = \mathrm{tr}\,(D_u A D_u B).$$

Soit α une racine carrée dans $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ de A, β une racine carrée dans $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ de B (que l'on construit via le théorème spectral par exemple : si $A = P\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)P^\top$, alors $\alpha = P\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})P^\top$ convient). Il vient

$$u^\top A \odot Bu = \mathrm{tr}\left(D_u \alpha^2 D_u \beta^2 \right) = \mathrm{tr}\left(\beta D_u \alpha^2 D_u \beta \right) = \langle \alpha D_u \beta \mid \alpha D_u \beta \rangle = \|\alpha D_u \beta\|^2 \geqslant$$

Ceci est vrai pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, donc $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ est stable par produit de Hadamard.

5) Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et $c \in [\,0\,;+\infty\,[$. Notons plutôt, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $S_k = (s_{i,j}^{(k)})$ la matrice telle que

$$s_{i,j}^{(k)} = \left(u_i^\top u_j + c \right)^k.$$

D'abord, la matrice S_1 est dans $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. En effet la matrice G de terme général $u_i^\top u_j$ est dans $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$: elle est clairement symétrique, et s'écrit $M^\top M$, où M est la matrice de la famille $(u_1, \dots, u_n)$ dans la base canonique. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a donc $x^\top Gx = x^\top M^\top Mx = \|Mx\|^2 \geqslant 0$. Et la matrice de terme général c, soit cJ_n est également dans $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$: la matrice Attila J_n s'écrit $vv^\top$ avec $v = (1, \dots, 1)$ donc est dans $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ via la question **2)**, et donc $cJ_n \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ via la question **1)**, puis $S_1 = G + cJ_n \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ toujours par la question **1)**. Pour conclure, reste à raisonner par récurrence sur k.

— Clairement, $S_0 = I_n \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$, et l'on vient de prouver que $S_1 \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.

— Soit $k \in \mathbb{N}$, supposons $S_k \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. Alors $S_{k+1} = S_k \odot S_1$ donc $S_{k+1} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Par récurrence, on conclut que $S_k \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 31 (★★☆)

1) p et q sont des projecteurs orthogonaux, donc ils sont symétriques, et donc $p-q$ aussi.
Soit $x \in F$, on le note $x = y + z$ avec $y \in \operatorname{Ker} p$ et $z \in \operatorname{Im} p$, donc $p(x) = z$. Alors $\langle x, p(x)\rangle = \|z\|^2 \geqslant 0$. D'autre part, $\|z\|^2 = \|x\|^2 - \|y\|^2 \leqslant \|x\|^2$ avec Pythagore. De même, $0 \leqslant \langle x, q(x)\rangle \leqslant \|x\|^2$. Alors $-\|x\|^2 \leqslant \langle x, (p-q)(x)\rangle \leqslant \|x\|^2$. Si x est un vecteur propre de valeur propre λ, $\langle x, (p-q)(x)\rangle = \lambda \|x\|^2$, donc $\lambda \in [-1, 1]$.

2) $x \in \operatorname{Ker}(u - \mathrm{id})$ implique que $\langle x, u(x)\rangle = -\|x\|^2$, ce qui n'est possible que si $p(x) = 0$ et $q(x) = x$, donc $x \in \operatorname{Ker}(p) \cap \operatorname{Im}(q)$. La réciproque est évidente.
De même, $\operatorname{Ker}(u + \mathrm{id}) = \operatorname{Im}(p) \cap \operatorname{Ker}(q)$.

II. Analyse

Exercice 32 (★☆☆) Comme (u_n) décroît, elle possède une limite finie ou infinie. Le deuxième cas est impossible car alors $u_n + u_{n+1}$ tendrait vers $-\infty$, alors que $\frac{1}{n}$ tend vers zéro. On note alors ℓ la limite finie de (u_n). Dans ce cas, $u_n + u_{n+1}$ tend à la fois vers 2ℓ et zéro, donc

$$\ell = \lim u_n = 0.$$

La décroissance de (u_n) donne l'encadrement suivant :

$$\frac{1}{2}(u_n + u_{n+1}) \leqslant u_n = \frac{1}{2}(u_n + u_n) \leqslant \frac{1}{2}(u_n + u_{n-1}).$$

Par hypothèse, le minorant est équivalent à $\frac{1}{2n}$ et le majorant à $\frac{1}{2(n-1)}$, lui-même équivalent à $\frac{1}{2n}$. On conclut que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.$$

Exercice 34 (★★★)

1) Soit $a \in V(u)$ et $r > 0$. Par définition il existe une sous-suite v de u qui converge vers a, donc à partir d'un certain rang n_0, on a $v_n \in B(a, r)$. En particulier $B(a, r)$ contient une infinité d'éléments de u.
Réciproquement, si toute boule ouverte centrée en a contient une infinité d'éléments de u, alors on peut (par exemple) par récurrence construire une suite d'entiers $(\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ strictement croissante de la façon suivante :

— $\varphi(0) = 0$.

— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n+1)$ est le plus petit entier k supérieur à $\varphi(n)$ tel que $u_k \in B(a, \frac{d_n}{2})$ où $d_n = \left|u_{\varphi(n)} - a\right|$ (un tel entier existe car $B(a, \frac{d_n}{2})$ contient une infinité d'éléments de u).

Par construction on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $d_{n+1} \leqslant \frac{d_n}{2}$ donc $d_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, autrement dit la sous-suite u_φ tend vers a.

2) Soit $a \notin V(u)$. L'équivalence précédente donne un $r > 0$ tel que $B(a,r)$ contient un nombre fini de termes de la suite u. Mais alors, pour tout $b \in B(a,r)$, on a $B(b, r - |b-a|) \subset B(a,r)$ donc $B(b, r - |b-a|)$ contient encore un nombre fini de termes de la suite u, ce qui prouve que $b \notin V(u)$.

Ceci prouve que le complémentaire de $V(u)$ est un ouvert donc que $V(u)$ est un fermé.

3) Il suffit de considérer l'ensemble $A = \{n \in \mathbb{N} \mid \forall m \geqslant n,\ u_m \leqslant u_n\}$.

Si A est une partie finie de $\mathbb{N}$ (donc bornée), alors en notant n_0 un majorant strict de A, on a $\forall n \geqslant n_0,\ n \notin A$ soit $\forall n \geqslant n_0,\ \exists m \geqslant n,\ u_m > u_n$. On construit alors une suite extraite strictement croissante u_φ en posant $\varphi(0) = n_0$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\varphi(k+1)$ l'entier minimal (strictement) supérieur à $\varphi(k)$ tel que $u_{\varphi(k+1)} > u_{\varphi(k)}$, qui existe par ce qui précède.

Si au contraire A est infini, on peut énumérer ses éléments, c'est-à-dire écrire $A = \{\varphi(n),\ n \in \mathbb{N}\}$ avec φ strictement croissante. Par construction de A on a alors $\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi(n+1) \geqslant \varphi(n)$ et $\varphi(n) \in A$ donc $u_{\varphi(n+1)} \leqslant u_{\varphi(n)}$, autrement dit u_φ est décroissante.

4) On suppose que u est bornée, à valeur dans $[-M\,;M]$ pour un $M > 0$.

D'après ce qui précéde la suite u admet une sous-suite monotone, elle-même bornée donc convergente. Autrement dit $V(u)$ est non vide.

Si $V(u)$ est réduit à un singleton $\{\ell\}$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ l'ensemble (fermé) $[-M\,;M] \setminus]\,\ell-\varepsilon\,;\ell+\varepsilon\,[$ contient un nombre fini de termes de la suite, sinon il contiendrait tous les termes d'une sous-suite de u qui admettrait elle-même une sous-suite monotone donc convergente, dont la limite serait un élément de $[-M\,;M] \setminus]\,\ell-\varepsilon\,;\ell+\varepsilon\,[$ et de $V(u)$, ce qui est absurde.

Autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang n_0 à partir duquel tous les termes de la suite sont hors de $[-M\,;M] \setminus]\,\ell-\varepsilon\,;\ell+\varepsilon\,[$, soit dans $]\,\ell-\varepsilon\,;\ell+\varepsilon\,[$. C'est exactement la définition du fait que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ donc que u est convergente.

La réciproque est triviale : si u est convergente, alors toute sous-suite de u converge vers la même limite donc $V(u)$ est réduit à un singleton.

5) Soient a, b deux réels tels que $a < b$, $f\colon [a,b] \to [a,b]$ continue et (u_n) la suite définie par $u_0 \in [a,b]$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Si $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, supposons par l'absurde u non convergente, c'est-à-dire que $V(u)$ n'est pas réduit à un singleton. Soit alors $v = u_\varphi$ et $w = u_\psi$ deux sous-suites de limites $\ell_1 \neq \ell_2$ respectivement. Par continuité de f, on a $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_1$ donc $u_{\varphi(n)+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(\ell_1)$, et comme $u_{\varphi(n)+1} - u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on conclut que $f(\ell_1) = \ell_1$. De même $f(\ell_2) = \ell_2$.

Quitte à permuter les deux sous-suites, on peut supposer $\ell_1 < \ell_2$. Pour tout $x \in]\,\ell_1\,;\ell_2\,[$, on trouve une infinité de termes de la suite u dans tout voisinage de ℓ_1, en particulier strictement inférieurs à x. De même on en trouve une infinité supérieurs à x, précisément le va-et-vient entre des voisinages de ℓ_1 et ℓ_2 montrer qu'on peut trouver une infinité de valeurs de n tels que $u_n < x \leqslant u_{n+1}$.

Comme $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, pour tout $\varepsilon > 0$, la condition précédente impose $|u_n - x| < \varepsilon$ à partir d'un certain rang. Autrement dit $B(x,\varepsilon)$ contient une infinité de termes de la suite donc $x \in V(u)$, ce qui donne $f(x) = x$.

Finalement f coïncide avec l'indentité sur $[\,\ell_1\,;\ell_2\,]$. Et comme la suite u prend au moins une valeur dans cet intervalle, elle est nécessairement stationnaire, ce qui est absurde.

Ainsi u est convergente. La réciproque est triviale.

Exercice 35 (★★☆) Soit $f\colon x \in \mathbb{R}_+ \mapsto xe^{-x}$. Il s'agit d'une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ de dérivée $f'\colon x \mapsto (1-x)e^{-x}$, donc f croît de zéro à $\frac{1}{e}$ sur $[0,1]$, puis décroît de $\frac{1}{e}$ à zéro sur $[1,+\infty[$. On dispose du développement limité suivant en zéro :

$$f(x) = x - x^2 + o(x^2).$$

1) L'intervalle $I :=\ ,]0, \frac{1}{e}]$ est stable par f, et $u_1 \in I$, donc $u_n \in I$ pour tout $n \geqslant 1$. Comme f croît sur I et vérifie $\forall x \in I,\ f(x) < x$, la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ décroît strictement. Comme elle est minorée par zéro, elle converge. Comme f est continue, sa limite ℓ est un point fixe de f

sur $\overline{I} = [0, \frac{1}{e}]$. Il n'y en n'a qu'un, c'est zéro, donc

$$\lim u_n = 0.$$

Cette limite et le développement limité de f ci-dessus montrent que $u_{n+1} = f(u_n) = u_n - u_n^2 + o(u_n^2)$, donc que

$$v_n := \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_n - u_n^2 + o(u_n^2)} - \frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_n}\left(\frac{1}{1 - u_n + o(u_n)} - 1\right) = \frac{1}{u_n}(1+u_n+o(u_n)-1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

Le théorème de Cesàro montre alors que la moyenne arithmétique $V_n = \frac{1}{n}(v_1 + \cdots + v_n)$ converge aussi vers 1. Or V_n est une somme télescopique qui vaut $\frac{1}{n}(\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_1})$. On en déduit que la suite de terme général $\frac{1}{nu_{n+1}}$ converge vers 1, ou encore que la suite de terme général $\frac{1}{nu_n}$ converge vers 1, ce qui s'écrit encore

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

2) Comme $u_n^\alpha \sim \frac{1}{n^\alpha}$, la série $\sum u_n^\alpha$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Exercice 37 (★☆☆)

1) Soit (S_n) la suite des sommes partielles. Alors $S_{3n} = \dfrac{2}{\ln(n+3)}$, $S_{3+n1} = \dfrac{1}{\ln(n+3)}$ $S_{3n} = 0$. Les 3 tendent vers 0, donc $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

2) Non, par exemple si $a_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

3) On note $S_{n,p} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_n^p$. Pour tout p pair, $S_{3n+2,p} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2^p+2}{\ln^p(n+3)}$ qui diverge.

Pour p impair, $S_{3n+2,p} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2^p-2}{\ln^p(n+3)}$ qui diverge.

Exercice 38 (★☆☆)

1) Par une récurrence facile, $u_n > 0$. Alors $u_{n+1} \leqslant u_n + \dfrac{1}{n^2}$ donc $u_{n+1} - u_n \leqslant \dfrac{1}{n^2}$ donc $u_N \leqslant u_1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2}$ donc (u_n) est bornée, et donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

2) $u_n = o(1)$, on réinjecte : $u_{n+1} = o\left(\frac{1}{n}\right)$ et on réinjecte : $u_{n+1} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum u_n$ converge.

Exercice 39 (★☆☆)

1) Le terme général d'une suite convergente tend vers 0, donc f tend vers $+\infty$ en $+\infty$.
Elle n'est pas suffisante. Si $u_{2n+1} = (n+1)$ et $u_{2n} = n(n+1)$, et $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n+1}}{u_n}$, alors $S_{2n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}$, donc divergence bien qu'alternée et $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. On construit une fonction adéquate.

2) Reste d'une série alternée, avec le CSSA : $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, u_n du même signe que $\dfrac{(-1)^n}{f(n)}$.

3) $\sum u_n$ est une série alternée, et (u_n) tend vers 0. Montrons que $|u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

$$\begin{aligned}|u_{n+1}| - |u_n| &= (-1)^{n+1}(u_{n+1} + u_n)\\ &= -\frac{1}{f(n)} + \frac{2}{f(n+1)} - \frac{1}{f(n+2)} + (-1)^{n+1}(u_{n+3} + u_{n+2})\\ &\leqslant |u_{n+3}| - |u_{n+2}|\end{aligned}$$

donc $(|u_{2n+1}| - |u_{2n}|)$ est croissante, or elle tend vers 0, donc elle est négative.
Idem avec $(|u_{2n+2}| - |u_{2n+1}|)$.
On conclut avec le CSSA : $\sum u_n$ converge.

Exercice 40 (★★☆) On formule une hypothèse supplémentaire minime pour pouvoir résoudre l'exercice : f' ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}_+$, de sorte que la réciproque $g = f^{-1}$ sera aussi de de classe $\mathscr{C}^1$. Par ailleurs, le caractère bijectif et continu de f de $\mathbb{R}_+$ dans lui-même impose que $f(0) = g(0) = 0$ et que f et g sont strictement croissantes et de limite $+\infty$ en $+\infty$. Ces arguments seront utilisés au fil de la démonstration sans être systématiquement rappelés. Enfin, les séries considérées sont définies pour $n \geqslant 1$. On prouve séparément les deux implications.

On suppose que $\sum \dfrac{1}{f(n)}$ converge. Comme $\frac{1}{f}$ est strictement décroissante, continue et positive, le théorème de comparaison série intégrale affirme que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{f(t)}$ converge. Une intégration par parties sur le segment $[1, a]$ avec $a > 1$, suivie du changement de variable $t = g(u) = f^{-1}(u)$, pour lequel $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}u}{f'(g(u))}$, donnent

$$\int_1^a \frac{\mathrm{d}t}{f(t)} = \left[\frac{t}{f(t)}\right]_1^a + \int_1^a \frac{tf'(t)}{f^2(t)}\,\mathrm{d}t = \frac{a}{f(a)} - \frac{1}{f(1)} + \int_{f(1)}^{f(a)} \frac{g(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u.$$

Comme g est positive, il en résulte la majoration suivante, où l'on a posé $b = f(a)$:

$$\forall b \geqslant f(1), \quad \int_{f(1)}^b \frac{g(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u \leqslant \frac{1}{f(1)} + \int_1^{g(b)} \frac{\mathrm{d}t}{f(t)} - \frac{g(b)}{b} \leqslant \frac{1}{f(1)} + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{f(t)}.$$

Les intégrales partielles de la fonction positive $h\colon u \mapsto \frac{g(u)}{u^2}$ étant majorées, on en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{g(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u$ converge. Il ne reste plus qu'à montrer la convergence de la série de terme général $\frac{g(n)}{n^2}$. Cela ne résulte pas d'une comparaison série intégrale appliquée à la fonction h définie ci-dessus, car on n'en connaît pas le sens de variation. On remarque que

$$\forall n \geqslant 1, \quad \frac{g(n)}{(n+1)^2} \leqslant \frac{g(n)}{n^2} = \frac{g(n)}{(n+1)^2} \times \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \leqslant 4\frac{g(n)}{(n+1)^2},$$

de sorte que la convergence de $\sum \dfrac{g(n)}{n^2}$ est équivalente à la convergence de $\sum \dfrac{g(n)}{(n+1)^2}$. En majorant séparément numérateur et dénominateur (g est croissante et $u \mapsto \frac{1}{u^2}$ est décroissante), on obtient :

$$\forall k \geqslant 1, \quad \frac{g(k)}{(k+1)^2} = \int_k^{k+1} \frac{g(k)}{(k+1)^2}\,\mathrm{d}u \leqslant \int_k^{k+1} \frac{g(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u.$$

On en déduit les majorations suivantes des sommes partielles :

$$\sum_{k=1}^n \frac{g(k)}{(k+1)^2} \leqslant \int_1^{n+1} \frac{g(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{g(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u,$$

qui prouvent que $\sum \dfrac{g(n)}{(n+1)^2}$ converge, et finalement que $\sum \dfrac{g(n)}{n^2}$ converge.

Réciproquement, on suppose que $\sum \dfrac{g(n)}{n^2}$ converge. Comme précédemment, on montre que la série de terme général $\frac{g(n+1)}{n^2}$ (ou de terme général $\frac{g(n)}{(n-1)^2}$, ce qui revient au même) converge. La minoration suivante

$$\forall n \geqslant 1, \quad \int_n^{n+1} \frac{g(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u \leqslant \int_n^{n+1} \frac{g(n+1)}{n^2}\,\mathrm{d}u = \frac{g(n+1)}{n^2}$$

permet d'en déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{g(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u$ converge. On montre ensuite que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{f(t)}$ converge en reprenant la relation $\forall b > g(1)$, $\displaystyle\int_1^{g(b)} \frac{\mathrm{d}t}{f(t)} = \frac{g(b)}{b} - \frac{1}{f(1)} + \int_{f(1)}^b \frac{g(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u$ établie dans la première partie. Cette fois, pour montrer que les intégrales partielles de $\frac{1}{f}$ sont majorées, il faut de plus prouver que $\frac{g(b)}{b}$ est bornée au voisinage de l'infini. On va en fait montrer que $\frac{g(b)}{b}$ est de limite nulle en $+\infty$, en utilisant une technique à la Cauchy.

Comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{g(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u$ converge, son reste $R(b) = \displaystyle\int_b^{+\infty} \frac{g(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u$ est défini et tend vers zéro quand b tend vers l'infini. Alors, comme g est décroissante et positive et comme $u \mapsto \frac{1}{u^2}$ est décroissante,

$$0 \leqslant \frac{1}{4} \times \frac{g(b)}{b} = \int_b^{2b} \frac{g(b)}{(2b)^2}\,\mathrm{d}u \leqslant \int_b^{2b} \frac{g(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u = R(b) - R(2b),$$

et le théorème d'encadrement prouve la limite annoncée. Une fois que la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{f(t)}$ est établie, il suffit d'appliquer le théorème de comparaison série intégrale à la fonction positive décroissante $\frac{1}{f}$ pour en déduire que $\displaystyle\sum \frac{1}{f(n)}$ converge.

Exercice 41 (★☆☆) On remarque que la suite $(v_n)_n$ est croissante et donc minorée par $v_0 = 1$. De plus, $v_n^2 + u_n = (2v_{n+1} - v_n)^2$, donc

$$u_n = 4v_{n+1}(v_{n+1} - v_n).$$

On a donc $0 \leqslant 4(v_{n+1} - v_n) \leqslant u_n$. Par comparaison entre séries à termes positifs, on en déduit que, si la série $\sum u_n$ converge, il en est de même de la série de terme général $v_{n+1} - v_n$, ce qui équivaut à la convergence de la suite $(v_n)_n$.

Réciproquement, si la suite $(v_n)_n$ est convergente, elle est majorée par sa limite ℓ et $0 \leqslant u_n \leqslant 4\ell(v_{n+1} - v_n)$. La convergence de la série $\sum(v_{n+1} - v_n)$ entraîne donc celle de la série $\sum u_n$.

Exercice 42 (★★☆) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k}$. On utilise une comparaison série intégrale appliquée à la fonction $f\colon t \mapsto \frac{\ln(t)}{t}$, de dérivée $f'\colon t \mapsto \frac{1-\ln t}{t^2}$. Voici le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}_+^*$:

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

Cette fonction est décroissante sur $[e, +\infty[$. Pour tout entier $k \geqslant 3$ et $t \in [k, k+1]$, on peut donc écrire que $f(k+1) \leqslant f(t) \leqslant f(k)$ puis, en intègrent sur $[k, k+1]$: $f(k+1) \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(k)$. On somme de $k = 3$ à $(n-1)$ avec $n \geqslant 4$, et on obtient par la relation de Chasles : $\displaystyle\sum_{k=3}^{n-1} f(k+1) \leqslant \int_3^n f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=3}^{n-1} f(k)$. On a donc à ce stade :

$$S_n - f(1) - h(2) - h(3) \leqslant \int_3^n f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant S_n - f(1) - h(2) - h(n).$$

D'où, pour $n \geqslant 4$:

$$a_n = \int_3^n f(t)\,\mathrm{d}t + f(1) + f(2) + f(n) \leqslant S_n \leqslant \int_3^n f(t)\,\mathrm{d}t + f(1) + f(2) + f(3) = b_n.$$

D'autre part, $\displaystyle\int_3^n \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t = [\frac{1}{2}\ln^2(t)]_3^n = \frac{1}{2}(\ln^2(n) - \ln^2(3))$, donc $a_n \sim \frac{\ln^2(n)}{2}$ et $b_n \sim \frac{\ln^2(n)}{2}$ quand $n \to +\infty$. En divisant par cet équivalent commun, et avec le théorème d'encadrement, on obtient

$$S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln^2(n)}{2}.$$

Exercice 43 (★★☆) Le développement limité de f en zéro à l'ordre 1 s'écrit $f(t) = f'(0)t + t\theta(x) = t + t\theta(t)$, où θ est une fonction de limite nulle en zéro. On en déduit que

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}\theta\left(\frac{k}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n} + v_n,$$

avec $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}\theta\left(\frac{k}{n^2}\right)$. Montrons que la suite de terme général v_n converge vers zéro. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $t \in [0, \alpha[$, on ait $|\theta(t)| < \varepsilon$. Posons $N = \left\lfloor \frac{1}{\alpha} \right\rfloor$. Alors, pour tout $n > N$, on a $\frac{1}{n} < \alpha$, donc $\frac{k}{n^2} \in [0, \alpha[$ quel que soit l'entier k entre 1 et n. Par suite, pour tout $n > N$,

$$|v_n| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}\left|\theta\left(\frac{k}{n^2}\right)\right| < \frac{n+1}{2n}\varepsilon < \varepsilon.$$

On vient de montrer que v converge vers zéro, donc que u converge vers $\frac{1}{2}$.

Exercice 44 (★★☆)

1) Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à $(a_1,\dots,a_n)$ et $(b_1,\dots,b_n)$, avec $a_k=\frac{k}{\sqrt{u_k}}$ et $b_k=\sqrt{u_k}$, on obtient

$$\left|\sum_{k=1}^n a_kb_k\right| = \sum_{k=1}^n a_kb_k = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2\times\sum_{k=1}^n b_k^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^n \frac{k^2}{u_k}\times\sum_{k=1}^n u_k} = \sqrt{n^2\alpha_n\sum_{k=1}^n u_k}.$$

2) On en déduit en élevant au carré que

$$\frac{(n+1)^2}{4\displaystyle\sum_{k=1}^n u_k} \leqslant \alpha_n.$$

On calcule par ailleurs

$$\alpha_n-\alpha_{n+1}+\frac{1}{u_{n+1}} = \left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\sum_{k=1}^n\frac{k^2}{u_k}-\frac{1}{(n+1)^2}\times\frac{(n+1)^2}{u_{n+1}}+\frac{1}{u_{n+1}} = \frac{2n+1}{(n+1)^2}\alpha_n.$$

On obtient alors

$$\frac{n}{\displaystyle\sum_{k=1}^n u_k} \leqslant \frac{2n+1}{2\displaystyle\sum_{k=1}^n u_k} = \frac{(n+1)^2}{4\displaystyle\sum_{k=1}^n u_k}\times\frac{2(2n+1)}{(n+1)^2} = \frac{2(2n+1)}{(n+1)^2}\alpha_n \leqslant 2\left(\alpha_n-\alpha_{n+1}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)$$

3) Dans le cas où $\sum\frac{1}{u_n}$ converge, on en déduit que

$$\forall N\in\mathbb{N}^*,\quad 0\leqslant\sum_{n=1}^N\frac{n}{\displaystyle\sum_{k=1}^n u_k}\leqslant 2\left(\alpha_1-\alpha_{N+1}+\sum_{n=1}^N\frac{1}{u_{n+1}}\right)\leqslant 2\left(\alpha_1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{u_{n+1}}\right)=2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{u_n},$$

puisque $\alpha_1=\frac{1}{u_1}$. La suite des sommes partielles de la série à termes positifs $\sum\frac{n}{u_1+\cdots+u_n}$ est donc majorée, donc cette dernière série converge. On en déduit aussi que, dans ce cas :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{u_1+\cdots+u_n}\leqslant 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{u_n}.$$

Exercice 45 (★★☆) Posons $f(t)=(\ln t)^2$ pour tout $t\geqslant 1$.

On définit ainsi une fonction continue et croissante. Par suite, $\int_{k-1}^k f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant f(k)\leqslant\int_k^{k+1}f(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout $k\geqslant 2$, donc $\int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant a_n\leqslant\int_2^{n+1}f(t)\,\mathrm{d}t$. Une intégration parties fournit une primitive de f : il s'agit de $t\mapsto \ln t(t\ln t-t)-(t\ln t-t)+t$. On en déduit alors que

$$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n(\ln n)^2$$

Alors $\frac{1}{a_n}\sim g(n)$ avec $g(t)=\frac{1}{(t\ln t)^2}$. Une primitive de g est $t\mapsto-\frac{1}{\ln t}$, ce qui montre que g est intégrable sur $[2,+\infty[$: comme g est par ailleurs décroissante, le théorème de comparaison série-intégrale affirme que $\sum g(n)$ est convergente. On en déduit que $\sum\frac{1}{a_n}$ converge.

Exercice 46 (★★☆)

1) Pour x fixé, on dérive par rapport à y la relation qui définit les fonctions $f\in\mathscr{E}$. Comme $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{2xy}{x+y}\right)=2x\frac{x+y-y}{(x+y)^2}$, on obtient bien

$$\forall(x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2,\quad \frac{2x^2}{(x+y)^2}f'\left(\frac{2xy}{x+y}\right)=\frac{f'(y)}{2}.$$

2) La fonction homographique $x\mapsto\frac{2xA}{x+A}$ est continue et strictement croissante sur $[0,A]$, vaut zéro quand $x=0$ et vaut A quand $x=A$. Elle réalise donc une bijection de $]0,A[$ sur $]0,A[$, ce qui justifie, pour tout $t\in]0,A[$, l'existence et l'unicité de $x\in]0,A[$ tel que $\frac{2xA}{x+A}=t$.

3) Il suffit de montrer que la fonction $u\colon t\mapsto t^2f'(t)$ est constante sur tout intervalle du type $]0,A[$ avec $A\in\mathbb{R}_+^*$. En effet, si A et B sont deux éléments de $\mathbb{R}_+^*$, et si C_A et C_B sont les valeurs constantes de u sur $]0,A[$ et $]0,B[$ respectivement, alors u vaudra à la fois C_A et C_B sur $]0,\min(A,B)[$, donc $C_A=C_B$, ce qui prouve qu'il existe une constante universelle C telle que $u=C$ sur tout intervalle de la forme $]0,A[$, donc que u est constante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Soient donc $A \in \mathbb{R}_+^*$ et $t \in]0, A[$. Si x est l'unique réel défini à la question précédente, alors

$$u(t) = t^2 f'(t) = \frac{4Ax^2}{(x+A)^2} f'\left(\frac{2xA}{x+A}\right) = A^2 f'(A)$$

d'après la question **1)**. On a bien prouvé que u est constante sur $]0, A[$.

Analyse. Soit $f \in \mathscr{E}$. D'après ce qui précède, il existe une constante C telle que $f'(t) = \frac{C}{t^2}$ pour tout $t > 0$. On en déduit qu'il existe une constante D telle que $f(t) = D - \frac{C}{t}$ pour tout $t > 0$. Quitte à changer le nom de la constante C, cela revient à dire qu'il existe deux constantes C et D telles que $f(t) = D + \frac{C}{t}$ pour tout $t > 0$.

Synthèse. Soit $f \colon t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto D + \frac{C}{t}$. Pour que f soit à valeurs strictement positives, il faut que $D \geqslant 0$ (faire tendre t vers $+\infty$) et que $C \geqslant 0$ (faire tendre t vers zéro). Si $D = 0$, il faut de plus que $C > 0$ et si $C = 0$, il faut de plus que $D > 0$. On vérifie aisément que ces conditions suffisent :

$$(C, D) \in Q := (\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+) \cup (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*) = (\mathbb{R}_+)^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

En d'autres termes, Q est le quart de plan positif de $\mathbb{R}^2$, privé de l'origine. Par ailleurs, pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$,

$$f\left(\frac{2xy}{x+y}\right) = D + \frac{C(x+y)}{2xy}$$
$$\frac{f(x)}{2} + \frac{f(y)}{2} = \frac{D}{2} + \frac{C}{2x} + \frac{D}{2} + \frac{C}{2y} = D + \frac{C(x+y)}{2xy},$$

ce qui achève de prouver que f appartient à $\mathscr{E}$. En conclusion,

$$\mathscr{E} = \left\{ f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}_+^*), \quad \exists (C, D) \in Q, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(t) = D + \frac{C}{t} \right\}.$$

4) On raisonne par analyse et synthèse, en suivant les mêmes idées que ci-dessus (les démonstrations seront abrégées).

Analyse. Soit $g \in \mathscr{F}$. En dérivant la relation qui définit g par rapport à y pour x fixé, on obtient $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ \frac{1}{2} g'(\frac{x+y}{2}) = \frac{1}{2} g'(y)$, donc $g'(\frac{x+y}{2}) = g'(y)$. On en déduit que g' est constante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc que g est affine : il existe deux constantes C et D telles que $g(t) = Ct + D$ pour tout $t > 0$. Comme g doit être à valeurs strictement positives, il faut que $(C, D) \in Q$.

Synthèse. On vérifie sans peine que les conditions ci-dessus suffisent :

$$\mathscr{F} = \left\{ g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}_+^*), \quad \exists (C, D) \in Q, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad g(t) = Ct + D \right\}.$$

On associe ensuite à toute fonction $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}_+^*)$ la fonction $g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}_+^*)$ définie par $\forall t > 0,\ g(t) = f(\frac{1}{t})$. La condition $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ f(\frac{2xy}{x+y}) = \frac{f(x)}{2} + \frac{f(y)}{2}$ se traduit par $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ g(\frac{1/x + 1/y}{2}) = \frac{1}{2}(g(\frac{1}{x}) + g(\frac{1}{y}))$, ou encore par $\forall (u, v) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ g(\frac{u+v}{2}) = \frac{1}{2}(g(u) + g(v))$, puisque $x \mapsto \frac{1}{x}$ est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur lui-même.

En d'autres termes, $f \in \mathscr{E}$ si et seulement si $g \in \mathscr{F}$, ce qui permet de retrouver $\mathscr{E}$ à partir de $\mathscr{F}$.

Remarque. — Exiger que les fonctions $f \in \mathscr{E}$ et $g \in \mathscr{F}$ soient à valeurs strictement positives ajoute une complication inutile à l'exercice. Sans cette exigence, les résultats se formulent de la même manière, à condition d'abandonner les contraintes sur les constantes C et D, c'est-à-dire de remplacer Q par $\mathbb{R}^2$.

Exercice 47 (★★☆) Lemme. — Si I est un intervalle non banal de $\mathbb{R}$ et si $g \colon I \to \mathbb{R}$ est continue et injective, alors g est (strictement) monotone.

On démontre ce lemme par l'absurde en supposant que g est injective et continue, et n'est pas monotone. La négation de la monotonie de g est : il existe $(a, b, c, d) \in I^4$ tel que $a < b$ et $c < d$ et $g(a) < g(b)$ et $g(c) > g(d)$. On pose alors

$$h \colon t \in [0, 1] \mapsto g((1-t)b + dt) - g((1-t)a + ct).$$

Il s'agit d'une fonction continue et on constate que $h(0) = g(b) - g(a) > 0$ et $h(1) = g(d) - g(c) < 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires montre l'existence de $t_0 \in]0, 1[$ tel que $h(t_0) = 0$, soit

$g((1-t_0)b+dt_0) = g((1-t_0)a+ct_0)$. L'injectivité de g entraîne que $(1-t_0)b+dt_0 = (1-t_0)a+ct_0$, donc que $(1-t_0)(b-a) = t_0(c-d)$: c'est impossible, car le membre de gauche est strictement positif alors que celui de droite est strictement négatif.

On va montrer que f est injective. Le lemme prouvera alors qu'elle est monotone. Pour cela, on raisonne par contraposition, en supposant f continue et non injective : il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a<b$ et $f(a)=f(b)$.

— Si f est constante sur $]a,b[$, alors l'image par f de l'intervalle ouvert $]a,b[$ est un singleton, qui n'est pas un intervalle ouvert.

— Sinon, f admet un maximum M et un minimum $m \neq M$ sur le segment $[a,b]$ (par continuité), et l'un des deux est atteint sur $]a,b[$. Pour fixer les idées, disons que M est atteint sur $]a,b[$. Alors l'image par f de l'intervalle ouvert $]a,b[$ vaut $]m,M]$ ou bien $[m,M]$ suivant que le minimum est atteint exclusivement en a ou b, ou non. Dans les deux cas, cette image n'est pas un intervalle ouvert.

Exercice 48 (★★☆)

1) La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[e,+\infty[$ avec $\forall x \in]e,+\infty[$, $f'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} > 0$. Ainsi f est une bijection strictement croissante de $[e,+\infty[$ sur $[f(e), \lim_{x\to+\infty} f(x)[= [e,+\infty[$.

2) Comme $f(x) = \frac{x}{\ln x}$, on a

$$\forall x \geqslant e, \quad x = \frac{f^{-1}(x)}{\ln\left(f^{-1}(x)\right)} \quad \text{et} \quad \ln x = \ln(f^{-1}(x)) - \ln(\ln(f^{-1}(x))).$$

Or $\ln t - \ln(\ln t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \ln t$ et $\lim_{x\to+\infty} f^{-1}(x) = +\infty$ donc par composition :

$$\ln x = \ln\left(f^{-1}(x)\right) - \ln\left(\ln\left(f^{-1}(x)\right)\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln\left(f^{-1}(x)\right).$$

La première relation donne alors $f^{-1}(x) = x\ln(f^{-1}(x)) \sim x\ln x$ quand $x \to +\infty$.

Exercice 50 (★☆☆) L'égalité des accroissements finis permet de prouver que f_n est 1–lipschitzienne pour tout $n \in \mathbb{N}$: pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, il existe z dans l'intervalle ouvert d'extrémités x et y tel que $f_n(y) - f_n(x) = f_n'(z)(y-x)$, donc

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leqslant |x-y|.$$

En passant à la limite quand $n \to +\infty$ à x et y fixés, on prouve que f est elle aussi 1-lipschitzienne :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant |x-y|.$$

Cela entraîne la continuité de f.

Exercice 51 (★★☆)

1) Puisque (u_n) est bornée, le rayon de convergence de la série définissant $U(x)$ est infini, par comparaison avec la série exponentielle.
Si M est un majorant de $(|u_n|)$, alors $|s_n| \leqslant (n+1)M$, donc, pour tout x, $|\frac{s_k}{k!}x^k| \leqslant \frac{(k+1)M}{k!}|x|^k$. La règle de d'Alembert montre que cette série majorante est de rayon infini, donc $\sum \dfrac{s_k}{k!}x^k$ est de rayon infini.

2) Par dérivation terme à terme, on peut écrire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$U'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{u_k}{(k-1)!}x^{k-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{s_k - s_{k-1}}{(k-1)!}x^{k-1} = S'(x) - S(x).$$

3) On va montrer que $e^{-x}S(x)$ tend vers ℓ. On a

$$e^{-x}S(x) - \ell = e^{-x}(S(x) - \ell e^x) = e^{-x}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{s_k - \ell}{k!}x^k.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, il existe un rang N tel que, pour tout $n > N$, $|s_k - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Supposons $x > 0$. Alors

$$|e^{-x}S(x)-\ell| \leqslant e^{-x}\sum_{k=0}^{N} |s_k-\ell|x^k + e^{-x}\frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \leqslant e^{-x}\sum_{k=0}^{N} |s_k-\ell|x^k + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par croissances comparées, $h(x) := e^{-x}\sum_{k=0}^{N}|s_k-\ell|x^k$ tend vers 0 si x tend vers $+\infty$. Donc il existe A tel que, pour $x \geqslant A$, $h(x) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Finalement, si $x \geqslant A$,

$$|e^{-x}S(x)-\ell| \leqslant \varepsilon,$$

ce qui signifie que $e^{-x}S(x)$ tend vers ℓ si x tend vers $+\infty$.

Exercice 52 (★★☆)

1) Si $x<0$, la série diverge grossièrement. Si $x=0$, c'est la série nulle. Si $x>0$, le terme général est négligeable devant la série géométrique convergente de terme général e^{-nx}, donc la série converge. Le domaine de définition de S est

$$[0,+\infty[.$$

2) On a $(\ln n)f_n'(x) = e^{-nx}(1-nx)$. Donc f_n est maximale en $\frac{1}{n}$. Le maximum est $\frac{e^{-1}}{n\ln n}$, terme général d'une série divergente, par comparaison série-intégrale. Donc la série n'est pas normalement convergente sur $[0,+\infty[$.

Posons maintenant $R_n(x) = \sum_{k=n}^{+\infty} f_k(x)$. On a

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad \forall n \geqslant 2, \quad 0 \leqslant R_n(x) \leqslant \frac{x}{\ln n}\sum_{k=n}^{+\infty} e^{-kx} \leqslant \frac{xe^{-2x}}{\ln n(1-e^{-x})}.$$

La fonction $x \mapsto \frac{xe^{-2x}}{1-e^{-x}}$ tend vers 1 en 0, vers 0 en $+\infty$, donc est bornée. La convergence uniforme sur $]0,+\infty[$, puis sur $[0,+\infty[$, en résulte.

3) Chaque f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et

$$f_n'(x) = \frac{e^{-nx}(1-nx)}{\ln n}.$$

Fixons un segment $[a,b]$ de $]0,+\infty[$. Alors

$$\forall x \in [a,b], \quad |f_n'(x)| \leqslant \frac{e^{-na}(1+nb)}{\ln n}.$$

Le majorant est le terme général d'une série convergente (par croissances comparées), donc $\sum f_n'$ est normalement convergente sur tout segment de $]0,+\infty[$, d'où il résulte que S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

4) On a $S(0)=0$, et $\forall x \in]0,+\infty[$, $\frac{S(x)}{x} = \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{e^{-nx}}{\ln n}$. Alors

$$\forall N \geqslant 2, \quad \forall x \in]0,+\infty[, \quad \frac{S(x)}{x} \geqslant \sum_{n=2}^{N}\frac{e^{-nx}}{\ln n}.$$

Soit $A>0$. La série étant divergente, il existe N tel que $\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\ln n} \geqslant 2A$. Pour un tel N,

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad \frac{S(x)}{x} \geqslant \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{e^{-nx}}{\ln n}-\frac{1}{\ln n}\right)+2A.$$

Or on a $\lim_{x\to 0^+}\sum_{n=1}^{N}(\frac{e^{-nx}}{\ln n}-\frac{1}{\ln n}) = 0^-$, donc il existe $\alpha>0$ tel que $\forall x \in]0,\alpha[$, $\sum_{n=1}^{N}(\frac{e^{-nx}}{\ln n}-\frac{1}{\ln n} \geqslant -A$. Alors $\forall x \in]0,\alpha[$, $\frac{S(x)}{x} \geqslant A$, ce qui signifie que

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{S(x)}{x} = +\infty,$$

donc que f n'est pas dérivable en 0.

Exercice 53 (★☆☆)

1) Si $0 \leqslant x < 1$, alors $0 \leqslant f_n(x) \leqslant x^n$, donc la série de terme général $f_n(x)$ converge. Si $x \geqslant 1$, la suite de terme général ne converge pas vers zéro (vers $\frac{1}{2}$ si $x=1$ et vers 1 si $x>1$), donc la série correspondante diverge.

Finalement, $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $[0,1[$.

2) Les f_n sont de classe $\mathscr{C}^1$, avec $f_n'(x) = \frac{nx^{n-1}}{(1+x^n)^2} \geqslant 0$. Par suite, f_n est croissante sur $[0,1[$.

On fixe $a \in]0,1[$. Comme f_n est positive et croissante, on a

$$\|f_n\|_\infty^{[0,a]} = f_n(a),$$

ce qui montre que $\sum_{n \geqslant 0} f_n$ converge normalement sur $[0,a]$. En revanche, comme $\|f_n\|_\infty^{[0,1[} = f_n(1) = \frac{1}{2}$, il n'y a pas convergence normale sur $[0,1[$.

La réponse à la question posée est donc : sur tout intervalle I contenu dans $[0,1[$ tel que $\sup I < 1$.

Exercice 54 (★★☆)

1) L'hypothèse $f \in \mathscr{C}^1(]0,1[,\mathbb{R})$ et le théorème fondamental de l'intégration montrent que, pour tour $(x,y) \in]0,1[^2$, on a $f(x) - f(y) = \int_x^y f'(t)\,\mathrm{d}t$. En supposant $x \leqslant y$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz entraîne alors que

$$|f(x)-f(y)| = \left|\int_x^y f'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \sqrt{\int_x^y f'^2(t)\,\mathrm{d}t}\sqrt{\int_x^y \mathrm{d}t} \leqslant \sqrt{\int_0^1 f'^2(t)\,\mathrm{d}t}\sqrt{\int_x^y \mathrm{d}t} = \sqrt{y-x} = \sqrt{|x-y|}.$$

L'inégalité reste valable si $x > y$ (en échangeant leur rôles), et s'étend aux valeurs de x et y dans $\{0,1\}$ par continuité de f sur le segment $[0,1]$:

$$\forall (x,y) \in [0,1]^2, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant \sqrt{|x-y|}.$$

2) En écrivant l'inégalité de Hölder ci-dessus pour la fonction f_n à (x,y) fixé, et en passant à la limite quand $n \to +\infty$, on obtient que g est elle aussi $\frac{1}{2}$-höldérienne :

$$\forall (x,y) \in [0,1]^2, \quad |g(x) - g(y)| \leqslant \sqrt{|x-y|}.$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. On choisit un entier $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{N} \leqslant \frac{\varepsilon^2}{8}$, ce qui est possible, et on subdivise le segment $[0,1[$ par les points d'abscisse $\frac{k}{N}$ pour $k \in [\![0,N]\!]$. La convergence simple de (f_n) vers g montre que, pour tout $k \in [\![0,N]\!]$, il existe $n_k \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_k$, on ait $|f_n(\frac{k}{N}) - g(\frac{k}{N})| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. On pose $n^* = \max_{0 \leqslant k \leqslant N} n_k$: cet entier ne dépend que de ε.

Pour tout $n \geqslant n^*$ et tout $x \in [0,1]$, on majore la distance entre $f_n(x)$ et $g(x)$ comme suit, où k est un entier dans $[\![0,N]\!]$ tel que $x \in [\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}]$ (il en existe un ou deux) :

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - g(x)| &\leqslant \left|f_n(x) - f_n\left(\frac{k}{N}\right)\right| + \left|f_n\left(\frac{k}{N}\right) - g\left(\frac{k}{N}\right)\right| + \left|g\left(\frac{k}{N}\right) - g(x)\right| \\
&\leqslant \sqrt{x - \frac{k}{N}} + \left|f_n\left(\frac{k}{N}\right) - g\left(\frac{k}{N}\right)\right| + \sqrt{x - \frac{k}{N}} \\
&\leqslant \frac{2}{\sqrt{N}} + \left|f_n\left(\frac{k}{N}\right) - g\left(\frac{k}{N}\right)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \left|f_n\left(\frac{k}{N}\right) - g\left(\frac{k}{N}\right)\right| \leqslant \varepsilon,
\end{aligned}$$

la dernière majoration venant de ce que $n \geqslant n^*$. On a bien démontré que la convergence de la suite (f_n) vers g est uniforme.

Exercice 56 (★☆☆)

On dérive, on obtient $f'(x) + \int_0^x +xf(x) - xf(x) = 0$, soit $F'' + F = 0$ avec F la primitive de f d'annulant en 0. Alors il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $F = a\cos + b\sin$. Mais $F(0) = 0$ donc $a = 0$, et donc $f = b\cos$. Alors $x\int_0^x f = bx\sin x$ et $-\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t = -b\sin s - b\sin x + b$, donc $f(x) + \int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t = b$, donc $b = 1$ et $f = \sin$ est la seule solution.

Exercice 57 (★★☆)

1) Les théorèmes de croissance comparée montrent que $t^2 P(t) e^t$ tend vers zéro quand t tend vers $-\infty$. La règle de Riemann montre alors que la fonction $t \mapsto P(t)e^t$ est intégrable sur tout intervalle de la forme $]-\infty, x]$. En particulier, l'intégrale proposée converge.

2) Soient a et x deux réels tels que $a < x$, et soit $k \in \{0, \ldots, n-1\}$. On effectue une intégration par parties sur le segment $[a,x]$, consistant à dériver t^{k+1} :

$$e^{-x}\int_a^x t^{k+1}e^t\,\mathrm{d}t = e^{-x}\left(\left[t^{k+1}e^t\right]_a^x - (k+1)\int_a^x t^k e^t\,\mathrm{d}t\right) = x^{k+1} - a^{k+1}e^{-x+a} - (k+1)e^{-x}\int_a^x t^k e^t\,\mathrm{d}t.$$

En faisant tendre a vers $-\infty$, on obtient $e^{-x}\int_{-\infty}^x t^{k+1}e^t\,\mathrm{d}t = x^{k+1} - (k+1)e^{-x}\int_{-\infty}^x t^k e^t\,\mathrm{d}t$, et ceci pour tout $x \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire

$$L(\mu_{k+1}) = \mu_{k+1} - (k+1)L(\mu_k).$$

Cette relation s'écrit aussi :

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad (-1)^{j+1}\frac{L(\mu_{j+1})}{(j+1)!} - (-1)^j\frac{L(\mu_j)}{j!} = (-1)^j\frac{\mu_j}{j!}.$$

On somme pour j allant de zéro à $k-1$, et on obtient, par télescopage :

$$L(\mu_k) = (-1)^k k!\sum_{j=0}^k (-1)^j\frac{\mu_j}{j!}.$$

3) La relation $L(\mu_k) = (-1)^k k!\sum_{j=0}^k (-1)^j\frac{\mu_j}{j!}$ montre que la matrice de L dans $(\mu_0, \ldots, \mu_n)$, la base canonique de E, est triangulaire supérieure. Les valeurs propres de L sont donc les éléments diagonaux de cette matrice, qui sont tous égaux à 1 :

$$\mathrm{Sp}\,(L) = \{1\}.$$

L'endomorphisme L n'est donc pas diagonalisable (il a une unique valeur propre égale à 1 et n'est pas l'identité).

Exercice 58 (★★☆) On note $f * g$ la fonction $x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t$ si elle est définie.

1) Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, l'application $h_x\colon t \mapsto f(t)g(x-t)$ est continue et $|h_x(t)| \leqslant |f(t)|\|g\|_\infty$ qui est intégrable donc h_x aussi et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t\right| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} h_x(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |h_x(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \|g\|_\infty \int_{-\infty}^{+\infty}$$

qui est une constante par rapport à la variable x, donc $f * g$ est bornée.

2) La majoration $|ab| \leqslant \frac{1}{2}(a^2+b^2)$ donne $\forall t \in \mathbb{R},\ |h_x(t)| \leqslant \frac{1}{2}(f(t)^2 + g(x-t)^2)$. La fonction f^2 est intégrable, et le changement de variable affine $t = \varphi(u) = x-u$ donne $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x-t)^2\,\mathrm{d}t = \int_{+\infty}^{-\infty} g(u)^2(-\,\mathrm{d}u) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(u)^2\,\mathrm{d}u$, ce qui prouve que $t \mapsto g(x-t)^2$ est intégrable. Finalement, h_x est intégrable sur $\mathbb{R}$, et de plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$|(f*g)(x)| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)g(x-t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)^2\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x-t)^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}$$

Le majorant final étant une constante par rapport à la variable x, la fonction $f * g$ est bornée.

Exercice 60 (★★★) On pose

$$h\colon (x,t) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \frac{e^{itx}}{(1+t^2)^2} \quad \text{et} \quad k\colon (x,t) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \frac{e^{itx}}{1+t^2}.$$

Ce sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}^2$. Comme $|h(t)| \leqslant \frac{1}{(1+t^2)^2}$ et $|k(t)| \leqslant \frac{1}{1+t^2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, et comme les majorants sont des fonctions intégrables de la variable t (continues sur $\mathbb{R}$ et équivalentes à $\frac{1}{t^4}$ ou $\frac{1}{t^2}$ en $\pm\infty$), les fonctions f et g sont définies sur $\mathbb{R}$.

On remarque que la continuité de k et la domination

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2, \quad |k(x,t)| \leqslant \frac{1}{1+t^2}$$

par une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}$ montrent la continuité de g sur $\mathbb{R}$: voir la question **3)** pour l'utilisation de cette remarque.

1) La fonction h est de classe $\mathscr{C}^2$ avec

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial h}{\partial x}(x,t) = it\frac{e^{itx}}{(1+t^2)^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t) = (it)^2\frac{e^{itx}}{(1+t^2)^2}.$$

Ces dérivées partielles satisfont les hypothèses de domination

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2, \quad \left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t) := \frac{|t|}{(1+t^2)^2} \quad \text{et} \quad \left|\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant \psi(t) := \frac{t^2}{(1+t^2)^2}$$

où φ et ψ sont continues et intégrables sur $\mathbb{R}$ (équivalentes à $\frac{1}{|t|^3}$ ou à $\frac{1}{t^2}$ en $\pm\infty$). Le théorème de Leibniz de dérivation des intégrales à paramètres s'applique et prouve que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, avec

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2, \quad f'(x) = i\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t\,e^{itx}}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad f''(x) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2 e^{itx}}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t.$$

2) Pour établir la régularité de g, on ne peut pas faire la même démonstration, car $t \mapsto \frac{\partial k}{\partial x}(x,t)$ n'est intégrable sur $\mathbb{R}$ pour aucun x réel. On commence donc par transformer l'expression de g par intégration par parties, justifiée par la convergence du crochet :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad g(x) = \left[\frac{e^{itx}}{ix(1+t^2)}\right]_{t=-\infty}^{+\infty} + \frac{2}{ix}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{te^{itx}}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{ix}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{te^{itx}}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t.$$

On montre alors comme à la question précédente que $x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{te^{itx}}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et obéit à la formule de Leibniz, et on en déduit que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

3) Plutôt que de dériver l'égalité $g(x) = \cdots$ ci-dessus, on la réécrit sous la forme $ixg(x) = 2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{te^{itx}}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$, et on en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad i(xg'(x) + g(x)) = 2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{it^2 e^{itx}}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Une intégration par parties consistant à dériver $t \mapsto te^{ixt}$ et à intégrer $t \mapsto \frac{2t}{(1+t^2)^2}$, ainsi que l'identité $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{te^{itx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{ix}{2}g(x)$ prouvée début de cette question, conduisent à

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad i(xg'(x)+g(x)) = i\left[-\frac{te^{itx}}{1+t^2}\right]_{t=-\infty}^{+\infty} + i\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1+itx)e^{itx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = i\Bigl(1 -$$

On en déduit que g est solution, sur $\mathbb{R}^*$, de l'équation différentielle linéaire du premier ordre suivante :

$$y' + \frac{x}{2}y = 0.$$

Ses solutions sont sur $I_1 = \mathbb{R}_-^*$ ou $I_2 = \mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions de la forme $t \mapsto \lambda_k e^{-x^2/4}$, où λ_k est une constante sur l'intervalle I_k, avec $k = 1$ ou 2. Il existe donc $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad g(x) = \begin{cases} \lambda_1 e^{-x^2/4} & \text{si } x < 0 \\ \lambda_2 e^{-x^2/4} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Comme $g(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = [\arctan t]_{-\infty}^{+\infty} = \pi$ et comme on a démontré la continuité de g sur $\mathbb{R}$ dans l'introduction, on en déduit que $\lambda_1 = \lambda_2 = \pi$, et finalement que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \pi e^{-x^2/4}.$$

On note que cette expression prouve que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ tout entier.

La comparaison de certains calculs des questions **1)** et **2)**, ainsi que l'équation différentielle satisfaite par g, montrent que

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) = -\frac{x}{2}g(x) = g'(x).$$

Cette égalité reste vraie en $x = 0$ (par continuité, ou par calcul explicite), et on en déduit l'existence d'une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que

$f = g + c$. On détermine la valeur de c par le calcul de $f(0)$, effectué au moyen d'une intégration par parties *sur l'expression de* $g(0)$:

$$\pi = g(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \left[\frac{t}{1+t^2}\right]_{t=-\infty}^{+\infty} + 2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = 2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2+1-1}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$$
$$= 2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t - 2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} = 2\pi - 2f(0).$$

On en déduit que $f(0) = \frac{\pi}{2}$, donc que $c = -\frac{\pi}{2}$ et finalement que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \pi e^{-x^2/4} - \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 62 (★★☆) On pose $f\colon (x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \mapsto \exp(-(x^2 + \frac{t^2}{x^2}))$. Cette fonction est paire par rapport à t, donc on étudiera F sur $\mathbb{R}_+$ seulement.

— On sait que $F(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-x^2)\,\mathrm{d}x$ converge et a pour valeur $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ (intégrale de Gauss).

— Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto f(x,t)$ est continue, prolongeable par continuité en $x = 0^+$ par la valeur zéro, et vérifie $0 \leqslant f(x,t) \leqslant e^{-x^2} \leqslant e^{-x}$ pour $x \geqslant 1$, donc est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc $F(t)$ existe.

On conclut que F est définie sur

$$D_F = \mathbb{R}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et pour tout $t \in D_F = \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = -\frac{2t}{x^2}\exp(-[x^2 + \frac{t^2}{x^2}])$ est continue. On fixe un segment $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$. La domination locale

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times [a,b], \quad \left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leqslant \varphi(x) := \frac{2b}{x^2}\exp\left(-x^2 - \frac{a^2}{x^2}\right)$$

permet d'appliquer le théorème de dérivation des intégrales à paramètre. En effet φ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, prolongeable par continuité en $x = 0^+$ par la valeur zéro et vérifie $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant \frac{2b}{x^2}$, donc est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Par suite, F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, avec

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \quad F'(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,\mathrm{d}x = -2t\int_0^{+\infty} \exp\left(-x^2 - \frac{t^2}{x^2}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x^2}.$$

Pour $t > 0$, on effectue, dans l'intégrale ci-dessus donnant $F'(t)$, le changement de variable $u \mapsto x = \frac{t}{u}$, qui définit une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}_+^*$ sur lui-même, et pour lequel $\frac{\mathrm{d}x}{x^2} = -\frac{\mathrm{d}u}{t}$. On obtient

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad F'(t) = -2\int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{u^2} - u^2\right)\mathrm{d}u = -2F(t).$$

La fonction F est donc une des solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle $y' + 2y = 0$. Il existe donc une constante réelle λ telle que $\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ F(t) = \lambda e^{-2t}$. Par ailleurs, F est continue sur $\mathbb{R}$, car les hypothèses faibles du théorème de continuité sont satisfaites, et grâce à la domination $\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R},\ |f(x,t)| \leqslant \psi(x) := \exp(-x^2)$ avec ψ intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. On en déduit que $F(0) = \lambda = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ et, par parité, que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2|t|}.$$

Exercice 64 (★☆☆)

1) f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-r,r[$ et $f'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n-1}$, $f''(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n-2}$

2)

$$\begin{aligned}
x^2(1-x)f''(x) - x(1+x)f'(x) + f(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n+1} \\
&\quad - \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n+} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)(n-2)a_{n-1}x^n \\
&\quad - \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty}(n-1)a_{n-1}x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
&= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\left(n^2-2n+1\right)a_n - \left(n^2-2n+1\right)a_{n-1}\right)x^n \\
&= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}(n-1)^2\left(a_n - a_{n-1}\right)x^n
\end{aligned}$$

3) f sol de $(H) \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ \forall\, n \geqslant 1 \quad (n-1)^2\left(a_n - a_{n-1}\right) = 0 \end{cases}$

4) $\Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 \in \mathbb{R} \\ \forall n \geqslant 1 \quad a_n = 1 \end{cases}$ donc $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_1 x^n = \frac{a_1 x}{1-x}$ $\quad r = 1.$

5) On peut continuer avec la méthode de Lagrange en cherchant les sol sous la forme $y(x) = z(x)\dfrac{x}{1-x}$. On trouve

$$\mathrm{Vect}\left(x \mapsto \frac{x}{x-1}, x \mapsto \frac{x\ln x}{x-1}\right)$$

Exercice 68 (★★☆**)** On pose $u_n\colon t \in [0,1] \mapsto (\frac{1+t^2}{2})^n$.

1) On obtient $a_0 = 1$ et $a_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1+t^2}{2}\,\mathrm{d}t = [\frac{t}{2} + \frac{t^3}{6}]_0^1 = \frac{2}{3}$.
Pour tout $t \in [0,1[$, la suite numérique $(u_n(t))_{n\geqslant 0}$ converge vers zéro, puisqu'il s'agit d'une suite géométrique de raison $(1+t^2)/2 \in [\frac{1}{2}, 1[$.

De plus, la suite de terme général $u_n(1)$ est constante et vaut 1. La suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc simplement sur $[0,1]$ vers la fonction caractéristique du singleton $\{1\}$, qui est continue par morceaux. Par ailleurs, l'hypothèse de domination suivante est vérifiée : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0,1],\ |u_n(t)| \leqslant \varphi(1) := 1$, la fonction φ étant intégrable sur $[0,1]$. Le théorème de convergence dominée s'applique, et

$$\lim_{+\infty} a_n = \int_0^1 0\,\mathrm{d}t = 0.$$

2) a) Comme la raison $r = \frac{1+t^2}{2}$ appartient à $[0,1]$, la suite de terme général $u_n(t) = r^n$ est décroissante. Par conséquent, la suite des intégrales a_n est décroissante. Elle converge vers zéro d'après la question (a), et elle est positive. La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n a_n$ vérifie donc les hypothèses du théorème spécial des séries alternées, donc sa conclusion : elle converge.

b) Il s'agit de déterminer si l'on peut écrire $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 (-1)^n u_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n u_n(t)\,\mathrm{d}t$. Comme $\|(-1)^n u_n\|_\infty^{[0,1]} = 1$, la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n u_n$ n'est pas normalement convergente. On va alors appliquer le théorème de convergence dominée aux sommes partielles de cette série, considérée sur l'intervalle $[0,1[$. Pour tout $t \in [0,1[$, on pose

$$S_n(t) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k u_k(t)$$

$$S(t) = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k u_k(t) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(-\frac{1+t^2}{2}\right)^n = \frac{1}{1+\frac{1+t^2}{2}} = \frac{2}{3+t^2}.$$

Le dernier calcul est justifié par le fait que la raison $-\frac{1+t^2}{2}$ appartient à $]-1,1[$ lorsque $t \in [0,1[$, et signifie que la suite de fonctions (S_n) converge simplement sur $[0,1[$ vers la fonction S, qui est continue par morceaux. Par ailleurs, d'après la question précédente, la série $\sum(-1)^n u_n(t)$ vérifie, à $t \in [0,1[$ fixé, les hypothèses du théorème spécial des séries alternées, donc sa somme partielle d'ordre n vérifie l'hypothèse de domination $|S_n(t)| \leqslant |u_0(t)|$, où la fonction $|u_0|$ est intégrable sur $[0,1[$. Le théorème de convergence dominée affirme alors que S est intégrable sur $[0,1[$ (ce qui est clair) et que

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k a_k &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k = \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 S_n(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^1 S(t)\,\mathrm{d}t = 2\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1 = \frac{\pi\sqrt{3}}{9}.\end{aligned}$$

3) **a)** On constate que $\forall t \in [0,1],\ u_n(t) \geqslant t^2$, puisque cette inégalité équivaut à $1 \geqslant t^2$ pour tout $t \in [0,1]$. Par suite,

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad a_n \geqslant \int_0^1 t^{2n}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2n+1}.$$

D'après la question (a), on dispose aussi de l'inégalité $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leqslant 1$. Par suite, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\frac{|x|^n}{2n+1} \leqslant |a_n x^n| \leqslant |x|^n$. Les deux séries de termes généraux $\frac{|x|^n}{2n+1}$ et $|x|^n$ étant convergentes si et seulement $|x| < 1$, on en déduit que

$$R = 1.$$

b) On commence par établir une relation de récurrence entre a_n et a_{n-1} pour $n \geqslant 1$, grâce à une intégration par parties :

$$\begin{aligned}a_n &= \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n \mathrm{d}t\\ &= \left[t\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n\right]_0^1 - n\int_0^1 t^2\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{n-1}\mathrm{d}t\\ &= 1 - n\int_0^1 (t^2+1-1)\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{n-1}\mathrm{d}t\\ &= 1 - 2n\int_0^1\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n\mathrm{d}t + n\int_0^1\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{n-1}\mathrm{d}t\\ &= 1 - 2na_n + na_{n-1}.\end{aligned}$$

Cette relation s'écrit encore $1-2na_n+a_n+(n-1)a_{n-1}+a_{n-1} = 0$. On multiplie cette relation par x^n puis on somme pour n variant de 1 à l'infini, en profitant de la dérivabilité terme à terme sur l'intervalle ouvert de convergence $]-1,1[$. On obtient

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{+\infty}x^n - 2x\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty}a_nx^n\\ &\quad + x^2\sum_{n=1}^{+\infty}(n-1)a_{n-1}x^{n-2} + x\sum_{n=1}^{+\infty}a_{n-1}x^{n-1}\\ =&\sum_{n=1}^{+\infty}x^n - 2x\sum_{n=0}^{+\infty}na_nx^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n + a_0\\ &\quad + x^2\sum_{n=0}^{+\infty}na_nx^{n-1} + x\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\\ =&\frac{x}{1-x} - 2xf'(x) + f(x) - 1 + x^2f'(x) + xf(x)\\ =&0.\end{aligned}$$

On peut réécrire cette relation sous la forme

$$\forall x \in]-1,1[,\quad x(x-2)f'(x) + (x+1)f(x) = \frac{1-2x}{1-x}.$$

Exercice 69 (★★☆) La fonction φ ne s'annulant jamais, il est légitime de multiplier (E) par $2\frac{x'}{\varphi}$. On obtient alors

$$2\frac{x'x''}{\varphi}+2x'x=0.$$

En intégrant sur $[0,t]$, et en effectuant une intégration par parties sur le premier terme, on obtient

$$\forall t\in\mathbb{R}_+,\quad \left[\frac{(x')^2(u)}{\varphi(u)}\right]_0^t+\int_0^t\varphi'(u)\left(\frac{x'}{\varphi}\right)^2(u)\,\mathrm{d}u+x^2(t)-x^2(0)=0.$$

On obtient alors $x^2(t)=c-h(t)$, où c est la constante positive $x^2(0)+\frac{(x')^2(0)}{\varphi(0)}$ et $h(t)=\frac{(x')^2(t)}{\varphi(t)}+\int_0^t\varphi'(u)(\frac{x'}{\varphi})^2(u)\,\mathrm{d}u$ est une somme de deux termes positifs, puisque $\varphi>0$ et $\varphi'\geqslant 0$ par hypothèse. Par suite,

$$\forall t\in\mathbb{R}_+,\quad |x(t)|\leqslant\sqrt{c},$$

donc x est bornée.

Exercice 71 (★★☆) La partie D est ouverte (définie par des inégalités strictes portant sur des fonctions continues de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$), et D' est fermée (définie par des inégalités larges portant sur des fonctions continues de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$). De plus, D' est l'adhérence de D.

— Étude de f sur D.

Comme D est une partie ouverte et comme f est polynomiale, donc de classe $\mathscr{C}^1$, les éventuels extrema de f sur D sont atteints en des points critiques. On résout donc le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)&=&0\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)&=&0\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{rcl}-3(y-x)^2+6y&=&0\\ 3(y-x)^2+6x&=&0\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{rcl}y&=&-x\\ 12x^2+6x&=&0\end{array}\right.$$

$$\iff (x,y)=(0,0)\quad\text{ou}\quad\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

Le point $(0,0)$ n'appartenant pas à D, on se contente d'étudier f au voisinage de $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})\in D$. On pose $x=-\frac{1}{2}+h$ et $y=\frac{1}{2}+k$. Alors

$$\begin{aligned}f(x,y)&=\left(\frac{1}{2}+k+\frac{1}{2}-h\right)^3+6\left(-\frac{1}{2}+h\right)\left(\frac{1}{2}+k\right)\\&=(1+k-h)^3+6\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}(h-k)+hk\right)\\&=(1+3k-3h+3k^2+3h^2-6hk-3hk^2+3h^2k-h^3+k^3)-\frac{3}{2}+3h-3\\&=-\frac{1}{2}+3(h^2+k^2)-3hk^2+3h^2k-h^3+k^3\\&=-\frac{1}{2}+3(h^2+k^2)-3h(h^2+k^2)+3(h^2+k^2)k+2h^3-2k^3\\&=-\frac{1}{2}+3(h^2+k^2)(1-h+k)+2(h^3-k^3).\end{aligned}$$

On en déduit que $f(-\frac{1}{2}+h,\frac{1}{2}+k)-f(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})\sim 3(h^2+k^2)$ quand $(h,k)\to(0,0)$, donc que f possède un minimum local en $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, de valeur $-\frac{1}{2}$.

— Étude de f sur D'.

Comme D' est une partie fermée et bornée, et comme f est continue, le théorème de l'image compacte (ou des bornes atteintes) dit que f possède, sur D' un maximum global et un minimum global. On a vu que sur D, l'intérieur de D', la fonction f ne possédait qu'un seul extremum local et que c'est un minimum.

Par conséquent, on est certain que $f_{|D'}$ atteint son maximum global sur la frontière de D' : il s'agit des trois côtés du triangle rectangle qu'est D'.

— Étude de f sur le côté vertical de l'angle droit.

On évalue $g_1\colon y\in[-1,1]\mapsto f(-1,y)=(y+1)^3-6y=y^3+3y^2-3y+1$, puis $g_1'(y)=3y^2+6y-3=3(y^2+2y-1)$, dont les racines sont $-1\pm\sqrt{2}$. Seule la racine $r_1=-1+\sqrt{2}$ appartient à $[-1,1]$, et g_1 décroît sur $[-1,r_1]$ puis croît sur $[r_1,1]$, donc sur ce côté, f atteint son minimum en $(-1,r_1)$, et ce minimum vaut

$$g_1(r_1)=\left(\sqrt{2}\right)^3-6\left(-1+\sqrt{2}\right)=6-4\sqrt{2}\approx 0,34>-\frac{1}{2}=f\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$$

— Étude de f sur le côté horizontal de l'angle droit.
On évalue $g_2\colon x \in [-1,1] \mapsto f(x,1) = (1-x)^3 + 6x = -x^3 + 3x^2 + 3x + 1$, puis $g_2'(y) = -3x^2 + 6x + 3 = 3(-x^2 + 2x + 1)$, dont les racines sont $1 \pm \sqrt{2}$. Seule la racine $r_2 = 1 - \sqrt{2} = -r_1$ appartient à $[-1,1]$, et g_2 décroît sur $[-1, r_2]$ puis croît sur $[r_2, 1]$, donc sur ce côté, f atteint son minimum en $(r_2, 1)$, et ce minimum vaut

$$g_2(r_2) = \left(\sqrt{2}\right)^3 + 6\left(1 - \sqrt{2}\right) = 6 - 4\sqrt{2} = g_1(r_1).$$

— Étude de f sur l'hypoténuse.
On évalue $g_3\colon x \in [-1,1] \mapsto f(x,x) = 6x^2$, minimale en $x = 0$.

Enfin sur chacun des côtés de D', les restrictions de f atteignent des extrema locaux aux extrémités de ces côtés, c'est-à-dire aux sommets du triangle D'. On calcule

$$f(-1,1) = 6, \quad f(-1,1) = 2 \quad \text{et} \quad f(1,1) = 6.$$

On conclut que le maximum global de f sur D' vaut 6, et qu'il atteint en les deux sommets $\pm(1,1)$, et que le minimum global de f sur D' vaut $-\frac{1}{2}$, atteint en l'unique point $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Exercice 72 (★★☆)

1) La fonction f est polynomiale, donc de classe $\mathscr{C}^1$. Son gradient en $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ vaut $\nabla f(x,y) = (2x(y+1), x^2 + 3y^2)$. Ses points critiques sont obtenus en résolvant

$$\begin{cases} 2x(1+y) &= 0 \\ x^2 + 3y^2 &= 0. \end{cases}$$

dont l'unique solution est $(0,0)$ (en effet si $x \neq 0$, il faut que $y = -1$, et alors la deuxième équation s'écrit $x^2 + 3 = 0$, et elle n'a pas de solution réelle.

On examine la deuxième fonction partielle en $(0,0)$:

$$f(0,y) - h(0,0) = f(0,y) = y^3$$

ne garde pas un signe constant au voisinage de 0, donc f n'admet pas d'extremum local en $(0,0)$.

2) Le disque fermé D est (topologiquement) fermé et borné et f est continue, donc elle admet un minimum et un maximum sur D, qui sont nécessairement atteints sur la frontière puisque f n'admet pas d'extremum local. On paramètre la frontière de D (le cercle de centre l'origine et de rayon 1) par

$$\begin{cases} x &= \cos t \\ y &= \sin t. \end{cases}$$

On pose $g\colon [0, 2\pi], \ f(\cos t, \sin t) = \cos^2 t + \sin t$. Comme $g'(t) = (-2\sin t + 1)\cos t$, le tableau de variation de g est le suivant :

t	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{6}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$g'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(t)$	1	$\nearrow$	$\frac{5}{4}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$\frac{5}{4}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1

Ce tableau montre que g atteint son maximum en $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$ et son minimum en $\frac{3\pi}{2}$, donc

$$m = \inf_D f = -1, \quad \text{atteint en l'unique point } (0,-1)$$

$$M = \sup_D f = \frac{5}{4}, \quad \text{atteint en les deux points } \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ et } \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

III. Topologie

Exercice 73 (★★☆)

1) Facile avec inégalité triangulaire.

2) Utiliser une suite (k_n) tendant vers $K(f)$.

3) Soit $k = \max_{[0,1]} |P'|$. Avec $P \in \mathscr{C}^1$ et l'IAF, on a $K(P) \leqslant k$.
Soit $k' < k$. Avec le TAF il existe $a, b \in [0,1]$ tel que $k' < k = \left|\dfrac{P(a)-P(b)}{a-b}\right|$ donc $k'|b-a| < |P(a)-P(b)|$ donc $k' < K(P)$. Donc on a bien $k = K(P)$.

4) Oui, pas de difficulté particulière.

5) f est lipschitzienne sur $[0,1]$, donc continue, donc $|f|$ aussi, donc admet max et min. Il existe $a, b \in [0,1]$ tels que $\|f\|_\infty = |f(a)|$ et $\inf_{[0,1]} |f| = |f(b)|$. Alors

$$\begin{aligned}
\|f\|_\infty - \inf_{[0,1]} |f| &= |f(a)| - |f(b| \\
&\leqslant |f(a) - f(b)| \\
&\leqslant K(f)|a-b| \\
&\leqslant K(f) \qquad \text{car } a, b \in [0,1].
\end{aligned}$$

6) Non, considérer $f_n : x \mapsto \begin{cases} nx & \text{si } x \leqslant \frac{1}{n} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$. Alors $K(f_n) = n$ et $\|f_n\|_\infty = 1$.

Exercice 74 (★★☆) Si $n = 1$, le résultat est banal. On suppose désormais $n \geqslant 2$.

Sens direct. On raisonne par contraposition.

On note u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à A. Si u n'est pas une homothétie, on sait qu'il existe un vecteur $e_1 \in \mathbb{C}^n$ tel que $e_2 := u(e_1)$ n'est pas colinéaire à e_1. La famille (e_1, e_2) est alors libre, et le théorème de la base incomplète donne l'existence de $e_3, \ldots, e_n \in \mathbb{C}^n$ tels que $\mathscr{B} = (e_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ soit une base de $\mathbb{C}^n$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$, la famille $\mathscr{B}_\lambda = (\lambda e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est encore une base de $\mathbb{C}^n$, sur laquelle la matrice de u vaut

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & * & * \\ \lambda & * & \cdots & * & * \\ 0 & * & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & * & \cdots & * & * \end{pmatrix}$$

On a donc $A_\lambda \in E_A$ et $\|A_\lambda\| \geqslant |\lambda|$, donc E_A n'est pas bornée.

Sens réciproque. S'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $A = \lambda I_n$, alors $P^{-1}AP = A$ pour toute matrice $P \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{C})$, donc $E_A = \{A\}$ est borné.

Exercice 75 (★★☆) On fixe arbitrairement une norme sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$, notée $\| \ \|$. Si $P \in \mathscr{GL}_2(\mathbb{C})$, on remarque alors que $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C}) \mapsto \|M\|_P = \|P^{-1}MP\|$ est aussi une norme.

On distingue deux cas.

— Ou bien A est diagonalisable. On note λ_1 et λ_2 ses valeurs propres (non nécessairement distinctes, mais non nulles) et $P \in \mathscr{GL}_2(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$, et alors $P^{-1}A^{-1}P = \operatorname{diag}(\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1})$. Comme $\| \ \|_P$ est une norme, équivalente à $\| \ \|$ puisque $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ est de dimension finie, les suites (A^n) et (A^{-n}) sont bornées si et seulement si les suites $(\operatorname{diag}(\lambda_1^n, \lambda_2^n))$ et $(\operatorname{diag}(\lambda_1^{-n}, \lambda_2^{-n}))$ sont bornées. On vérifie ce caractère borné à l'aide de la norme $M = (m_{i,j}) \mapsto \max_{1 \leqslant i,j \leqslant 2} |m_{i,j}|$: pour cela, il faut et il suffit que les suites géométriques (λ_k^n) et (λ_k^{-n}) soient bornées pour $k \in \{1, 2\}$, ou encore que les modules $|\lambda_k|$ et $|\lambda_k^{-1}|$ de leurs raisons soient inférieurs ou égaux à 1. Cela équivaut finalement à
$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1.$$

— Ou bien A n'est pas diagonalisable. Elle possède une unique valeur propre λ, non nulle, et elle est trigonalisable. Mieux, on sait qu'il existe $P \in \mathscr{GL}_2(\mathbb{C})$ telle que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I_2 + E_{1,2} \quad \text{et alors} \quad P^{-1}A^{-1}P = \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & -\lambda^{-2} \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} = \lambda^{-1} I_2 -$$

La suite (A^n) est bornée si et seulement si la suite $((\lambda I_2+E_{1,2})^n)$ l'est. Comme I_2 et $E_{1,2}$ sont permutables, et comme $E_{1,2}$ est nilpotente d'ordre 2, la formule du binôme donne

$$(\lambda I_2 + E_{1,2})^n = \lambda^n I_2 + n\lambda^{n-1}E_{1,2} = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}.$$

On vérifie ce caractère borné à l'aide de la même norme que précédemment : pour que (A^n) soit bornée, il faut et il suffit que les deux suites de termes généraux λ^n et $n\lambda^{n-1}$ soient bornées, ce qui équivaut à $|\lambda| < 1$. De la même manière, (A^{-n}) est bornée si et seulement si $|\lambda^{-1}| < 1$, ce qui est incompatible avec la condition précédente.

La condition nécessaire et suffisante recherchée est donc : A est diagonalisable et ses valeurs propres sont de module 1.

Exercice 76 (★☆☆) On donne $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (xy, x + y)$, $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > y\}$ et $V = \varphi(U)$.

1) $\varphi(U) \subset V$ découle du fait que $(x-y)^2 > 0$ donc $x^2+y^2+2xy > 4xy$. Réciproquement, soit $(p, s) \in V$. Considérons le polynôme X^2-sX+p. On sait que les racines complexes de ce polynôme sont x et y telles que $x + y = s$ et $xy = p$. Or le discriminant de ce polynôme est $s^2 - 4p > 0$ donc x et y sont réelles et distinctes. Si l'o note x la plus grande des deux, alors $(p, s) = \varphi(x, y)$.

2) On considère $f : (p, s) \mapsto s^2 - 4p$. f est clairement continue et $V = f^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$, donc V est ouvert.

3) Les coordonnées de φ sont polynomiales.

Exercice 77 (★★★)

1) On démontre que l'ensemble E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

- Il contient la suite nulle.
- Soient (x_n) et (y_n) deux suites de E, et λ et μ deux nombres réels. La majoration (inégalité arithmético- géométrique) de termes positifs $\forall n \in \mathbb{N}$, $|x_n y_n| \leqslant \frac{1}{2}(x_n^2 + y_n^2)$ montre que la série de terme général $x_n y_n$ converge absolument, donc converge. Le développement

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (\lambda x_n + \mu y_n)^2 = \lambda^2 x_n^2 + 2\lambda\mu x_n y_n + \mu^2 y_n^2$$

montre alors que la suite $(\lambda x_n + \mu y_n)$ est de carré sommable, donc que E est stable par combinaison linéaire.

C'est donc un espace vectoriel.

2) La question précédente a prouvé que $\langle \ , \ \rangle$ est bien définie sur E^2.

- Son caractère symétrique résultede la commutativité de la multiplication dans $\mathbb{R}$.
- Sa linéarité à gauche résulte de la distributivité à gauche de la multiplication dans $\mathbb{R}$, et la symétrie assure alors la linéarité à droite.
- Enfin, si $(x_n) \in E$, alors $\langle x, x\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2$ est positif, et n'est nul que si tous les termes de cette somme de série sont nuls, c'est-à-dire si (x_n) est la suite nulle.

Cette application définit donc un produit scalaire sur E.

3) L'inégalité de Cauchy-Schwarz montre que

$$\left|\langle y, x^k\rangle - \langle y, x\rangle\right| = \left|\langle y, x^k - x\rangle\right| \leqslant \|y\|\|x^k - x\|.$$

Comme $\|x^k - x\| \to 0$ lorsque $k \to +\infty$, on en déduit que $\langle y, x^k\rangle \to \langle y, x\rangle$ lorsque $k \to +\infty$.

4) Il suffit de faire la démonstration lorsque $x \in E$ est la suite nulle, et d'appliquer ensuite ce cas particulier à $x^k - x$.

Soit $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\|x^k\| \leqslant M$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Comme la série de terme général $\sum y_n^2$ converge, la suite de ses restes est définie et est de limite nulle : il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n > n_0$, on ait $\displaystyle\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} y_n^2 \leqslant (\frac{\varepsilon}{2M})^2$. Alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz (notamment) permet d'écrire que

$$|\langle y, x_k\rangle| \leqslant \sum_{n=0}^{n_0} |y_n||x_n^k| + \left|\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} y_n x_n^k\right| \leqslant \sum_{n=0}^{n_0} |y_n||x_n^k| + \sqrt{\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} y_n^2}\sqrt{\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} (x_n^k)^2}$$
$$\leqslant \sum_{n=0}^{n_0} |y_n||x_n^k| + \frac{\varepsilon}{2M}\sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty}(x_n^k)^2} = \sum_{n=0}^{n_0} |y_n||x_n^k| + \frac{\varepsilon}{2M}\|x^k\| \leqslant \sum_{n=0}^{n_0} |y_n||x_n^k| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pour chaque $n \in [\![0, n_0]\!]$, il existe par hypothèse un entier k_n tel que, pour tout $k \geqslant k_n$, on ait $|x_n^k| \leqslant \frac{\varepsilon}{2(n_0+1)(|y_n|+1)}$. On pose $K = \max\{k_n,\ 0 \leqslant n \leqslant n_0\}$. Alors pour tout $k \geqslant K$, on a

$$|\langle y, x_k\rangle| \leqslant \sum_{n=0}^{n_0} |y_n| \frac{\varepsilon}{2(n_0+1)(|y_n|+1)} + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon.$$

Exercice 78 (★ ★ ☆) On dit que T est un opérateur positif. Comme il est linéaire, il est croissant, au sens où

$$\forall (f, g) \in E^2, \quad f \leqslant g \Rightarrow T(f) \leqslant T(g).$$

En effet, l'hypothèse est que $g - f \geqslant 0$, donc $T(g - f) \geqslant 0$, c'est-à-dire $T(g) - T(f) \geqslant 0$ par linéarité de T. On note θ la fonction de E constante égale à 1, et on pose $K = T(\theta)$. Le caractère croissant de f et l'encadrement $\forall f \in E,\ -\|f\|_\infty \theta \leqslant f \leqslant \|f\|_\infty \theta$ prouvent que

$$\forall f \in E, \quad -K\|f\|_\infty \leqslant T(f) \leqslant K\|f\|_\infty,$$

donc que $\forall f \in E,\ |T(f)| \leqslant K\|f\|_\infty$. La linéarité de f donne immédiatement

$$\forall (f, g) \in E^2, \quad |T(f) - T(g)| = |T(f - g)| \leqslant K\|f - g\|_\infty$$

donc T est K–lipschitzienne.

Exercice 79 (★ ★ ★)

1) L'inégalité est immédiate pour $a = 0$ ou $b = 0$. Supposons $a, b > 0$. On sait que le logarithme est une fonction concave : pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $\lambda \in [0, 1]$, on a

$$\lambda \ln(x) + (1 - \lambda)\ln(y) \leqslant \ln(\lambda x + (1 - \lambda)y).$$

Comme $p > 1$, le nombre $\lambda = \frac{1}{p}$ appartient à $[0, 1]$ et $1 - \lambda = 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{q}$. On applique alors l'inégalité de concavité ci-dessus à $x = a^p$ et $y = b^q$, ce qui donne $\frac{1}{p}\ln(a^p) + \frac{1}{q}\ln(b^q) = \ln(ab) \leqslant \ln(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q})$. Il suffit d'appliquer la fonction exponentielle (croissante) pour obtenir l'inégalité voulue :

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

2) D'abord, si $\|f\|_p$ et $\|g\|_q$ existent, alors grâce à l'inégalité précédente, on a

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad 0 \leqslant f(t)g(t) \leqslant \frac{(f(t))^p}{p} + \frac{g(t)^q}{q}.$$

Par le critère de comparaison des intégrales de fonctions positives, on a donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ qui converge, donc $\|fg\|_1$ existe, et vérifie $\|fg\|_1 \leqslant \frac{\|f\|_p^p}{p} + \frac{\|g\|_q^q}{q}$. Appliquant la même majoration à $u = \frac{f}{\|f\|_p}$ et $v = \frac{g}{\|g\|_q}$, on a par homogénéité des normes p et q, $\|u\|_p = 1$ et $\|v\|_q = 1$, donc $\|uv\|_1 \leqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Or par homogénéité de la norme 1 cette fois, $\|uv\|_1 = \frac{\|fg\|_1}{\|f\|_p\|g\|_q}$, donc on a bien

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \, \|g\|_q.$$

3) La fonction F est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ par les théorèmes généraux, et aussi en 0, car $u \colon x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable en 0, de nombre dérivé $f(0)$. D'où le développement limité $u(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = xf(0) + (x)$, et donc $F(x) = f(0) + (1)$.

Soit $X > 0$. On a $\displaystyle\int_0^X F(x)^p\,\mathrm{d}x = \int_0^X x^{-p}u(x)^p\,\mathrm{d}x$. Procédons à une intégration par parties. Les fonctions $x \mapsto \frac{x^{1-p}}{1-p}$ et u^p sont de classe

$\mathscr{C}^1$ sur $]\,0\,;X\,]$, et $\frac{x^{1-p}}{1-p}u^p(x) = \frac{x}{1-p}F^p(x) \to 0$ quand $x \to 0$ puisque F est continue en 0. D'où l'égalité et la majoration

$$\int_0^X F(x)^p \,\mathrm{d}x = \frac{X^{1-p}}{1-p}u^p(X) - \int_0^X \frac{x^{1-p}}{1-p}pf(x)u^{p-1}(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{p}{p-1}\int_0^X F^{p-1}(x)f(x)\,\mathrm{d}x,$$

puisque $\frac{X^{1-p}}{1-p}u^p(X) \leqslant 0$. Or en procédant sur $[\,0\,;X\,]$ comme sur $\mathbb{R}_+$ dans la question précédente, on montre que pour deux fonctions a et b continues, positives sur $[\,0\,;X\,]$, on a $\int_0^X a(x)b(x)\,\mathrm{d}x \leqslant (\int_0^X a^p(x)\,\mathrm{d}x)^{1/p}(\int_0^X b^q(x)\,\mathrm{d}x)^{1/q}$. Appliqué à $a = f$ et $b = F^{p-1}$, il vient

$$\int_0^X F^{p-1}(x)^f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_0^X f^p(x)\,\mathrm{d}x\right)^{1/p}\left(\int_0^X F^p(x)\,\mathrm{d}x\right)^{1/q},$$

puisque $(p-1)q = p$. Si f admet une norme $\|\cdot\|_p$, c'est-à-dire si $\int_0^{+\infty} f^p(x)\,\mathrm{d}x$ converge, alors $\int_0^X f^p(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{+\infty} f^p(x)\,\mathrm{d}x$ donc $(\int_0^X f^p(x)\,\mathrm{d}x)^{1/p} \leqslant \|f\|_p$. Dans ce cas, la majoration précédente devient $\int_0^X F^{p-1}(x)f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \|f\|_p(\int_0^X F^p(x)\,\mathrm{d}x)^{1/q}$ et donc

$$\int_0^X F(x)^p\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{p}{p-1}\|f\|_p\left(\int_0^X F^p(x)\,\mathrm{d}x\right)^{1/q}.$$

Finalement $(\int_0^X F(x)^p\,\mathrm{d}x)^{1-1/q} \leqslant \frac{p}{p-1}\|f\|_p$, donc $\int_0^X F(x)^p\,\mathrm{d}x \leqslant (\frac{p}{p-1}\|f\|_p)^p$. Ceci pour tout $X > 0$, donc l'intégrale $\int_0 +\infty F(x)^p\,\mathrm{d}x$ converge et $\int_0^{+\infty} F(x)^p\,\mathrm{d}x \leqslant (\frac{p}{p-1}\|f\|_p)^p$, soit

$$\|F\|_p \leqslant \frac{p}{p-1}\|f\|_p.$$

IV. Probabilités

Exercice 83 (★ ☆ ☆)

1)

$$\begin{aligned}
E\left(\frac{S_n}{n}\right) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n E(X_i) \text{ par ind}\\
&= \frac{1}{n}\cdot n \cdot p\\
&= p\\
V\left(\frac{S_n}{n}\right) &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n V(X_i) \text{ par ind}\\
&= \frac{1}{n}p(1-p)
\end{aligned}$$

2) Bienaymé-Tchebychev :

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$$

Rq : c'est aussi la loi faible des grands nombres.

3) $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n\ln^2 n}$.

Comp. série intégrale $\sum \dfrac{1}{n\ln^n}$ de même nature que $\int^{+\infty} \dfrac{1}{t\ln^2 t}\,\mathrm{d}t$ avec $u = \dfrac{1}{t}$, même nature que $\int^{+\infty} \dfrac{1}{u^2}\,\mathrm{d}u$ qui converge donc $\sum u_n$ cv.

Exercice 84 (★ ☆ ☆)

1) $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$

2)

$$\begin{aligned}P(X=2) &= \sum_{i=1}^{3} P\left(X=2 \mid U_i\right) P\left(U_i\right) \quad U_i = \quad \text{1ère boule dans urne } i \\ &= \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{3} \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\end{aligned}$$

3) $(X=1)=\bigsqcup_{i=1}^{3}(X=1) \cap($ Urne i vide $)$
$(X=1) \cap($ urne 1 vide $)=$ tout mettre dans les urnes 2 et 3 mais pas tout dans 2 ni tout dans 3.

$$P\left((X=1) \cap\left(U_1 \text{ vide }\right)\right)=\left(\frac{2}{3}\right)^n-\frac{1}{3^n}-\frac{1}{3^n}$$

donc $P(X=1)=\dfrac{2^n-2}{3^{n-1}}$ et donc $P(X=0)=1-\dfrac{2^n-2}{3^{n-1}}-\dfrac{1}{3^{n-1}}=\dfrac{3^{n-1}-2^n+1}{3^{n-1}}$.

4)

$$\begin{aligned}E(X) &= \frac{2^n-2}{3^{n-1}}+2 \cdot \frac{1}{3^{n-1}} \\ &= 2 \cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\end{aligned}$$

5) limite $E(X) \underset{m \to \infty}{\longrightarrow} 0$ interprétation : si le nombre de boules augmente, peu de chances qu'il n'y ait aucune urne vide.

Exercice 86 (★☆☆)

1) $X(\Omega)=\mathbb{N}^*$. Soit $f: t>0 \mapsto 1/t \quad f\left(\mathbb{N}^*\right) \subset \mathbb{R}^+$. d'où par formule de transfert (les $f(n) P(X=n)$ st $\geqslant 0$), la finalité des calculs justifient l'existence :

$$\begin{aligned}E(1/x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \underbrace{p(x=n)}_{=p(1-p)^{n-1}} \quad \forall x \in]-1,1[, \ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \\ &= \frac{-p}{1-p} \ln(1-(1-p))=\frac{-p \ln(p)}{1-p}\end{aligned}$$

2) **a)** Par formule de transfert (termes $\geqslant 0$)
$F_X(t)=\sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t x_k} P k$ cv $\forall t \geqslant 0$ car $x_k \geqslant 1$ et $0<\mathrm{e}^{-t x_k} \leqslant \mathrm{e}^{-t}$ et $\sum p_k$ cv d'où $\sum p_k \mathrm{e}^{-t}$ cv d'où $\mathrm{F}_x(t)$ cv par majoration

b) $\left(\|f_h\|_{\infty}^{\mathbb{R}^+}=p_k \text{ et } \sum p_k \quad cv\right)$ i.e $\sum f_k$ cv normalement sur $\mathbb{R}^+$.

3) **a)** $f_k \geqslant 0$ el $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_k(t)\, \mathrm{d} t=\frac{p_k}{x_k}$

b) On met en oeuvre le th ITT.
Les 1ères hyp : Ok et $\displaystyle\sum_{k \geqslant 0} \int_0^{+\infty}\left|f_k\right|=\sum_{k \geqslant 0} \frac{p k}{x_k}$ d'où cv d'où, par th, $F_X \in \mathscr{L}^1$ el $\displaystyle\int_0^{+\infty} F_\lambda=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} f_k(t)\, \mathrm{d} t\right)=\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{p_k}{x_k}=E\left(\frac{1}{x}\right)$ par transfert.

4) $x \sim \mathscr{G}(p) \quad X(\Omega)=\mathbb{N}^* \subset[1,+\infty[$.
$\forall t \geqslant 0, \quad f_X(t)=\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t k} p(1-p)^{k-1}=p \mathrm{e}^{-t} \frac{1}{1-(1-p) \mathrm{e}^{-t}} \quad \left(\text{car}\left|(1-p) e^{-t}\right|<1\right)$
d'où $\displaystyle\int_0^{+\infty} F_x(t) d t=\frac{p}{1-p}\left[\ln \left(1-(1-p) \mathrm{e}^{-t}\right)\right]_{t=0}^{t \rightarrow+\infty}=\frac{-p \ln p}{1-p}$ on retrouve bien $Q1$.

Exercice 87 (★☆☆)

1)

$$\begin{aligned}
&(X,Y)(\Omega) \subset (\mathbb{N}^*)^2 \\
&P(X=p, Y=q) = 0 \quad \text{si } p \leqslant q \\
&\qquad\qquad = P(X=p \mid Y=q)P(Y=q) \quad \text{si } p > q
\end{aligned}$$

Sachant $(Y=q)$, réaliser $(X=p)$ c'est chercher le rang du 1er face et avoir $p-q$.

$$\begin{aligned}
P(X=p, Y=q) &= \left(\frac{1}{2}\right)^{p-q-1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{q-1} \cdot \frac{1}{2} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{p}
\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}
P(X=p) &= \sum_{q=1}^{+\infty} P(X=p, Y=q) \\
&= \sum_{q=1}^{p-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{p} \\
&= (p-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{p}
\end{aligned}$$

3) $E(X) = \sum_{p=1}^{+\infty} p(p-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{p}$.
On connaît

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} &= \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \\
\frac{1}{(1-x)^2} &= \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} \\
\frac{2}{(1-x)^3} &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-n) x^{n-2}
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
E(X) &= \frac{1}{4}\sum_{p=2}^{+\infty} p(p-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{p-2} \\
&= \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3} \\
&= 4
\end{aligned}$$

Exercice 88 (★☆☆)

1) Non, $P(S_n < N) \neq 0$, $P(T_n = N) \neq 0$, mais $P(S_n < N, T_n = N) = 0$.

2) Soit $k \in [\![1, N]\!]$. Alors $[T_n = k] = \left[\bigcap_{i=1}^{n} X_i \geqslant k\right] \setminus \left[\bigcap_{i=1}^{n} X_i \geqslant k+1\right]$, et le second événement est inclus dans le premier. Donc $P(T_n = k) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} X_i \geqslant k\right) - P\left(\bigcap_{i=1}^{n} X_i \geqslant k+1\right) = \left(\frac{N-k+1}{N}\right)^n - \left(\frac{N-k}{N}\right)^n$.
Alors

$$\begin{aligned}
E(T_n) &= \sum_{k=1}^{N} k\left(\left(\frac{N-k+1}{N}\right)^n - \left(\frac{N-k}{N}\right)^n\right) \\
&= \sum_{k=1}^{N} k\left(\frac{N-(k-1)}{N}\right)^n - \sum_{k=1}^{N} k\left(\frac{N-k}{N}\right)^n \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} (k+1)\left(\frac{N-k)}{N}\right)^n - \sum_{k=1}^{N} k\left(\frac{N-k}{N}\right)^n \\
&= 1 - 0 + \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{N-k}{N}\right)^n.
\end{aligned}$$

3) Tous les termes de la somme précédente tendent vers 0, donc $E(T_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

Exercice 91 (★★☆) Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_p = \sum_{k=1}^{p} X_k$ et, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on pose $M_k = E(\frac{X_k}{S_n})$. Par positivité des X_k, la variable aléatoire $Q = \frac{S_m}{S_p}$ vérifie $0 \leqslant Q \leqslant 1$: elle est bornée, donc possède une espérance (ceci est indépendant du fait que les X_k ont une espérance ou non), et la question a un sens. Il en est de même pour les variables aléatoires $\frac{X_k}{S_n}$. La linéarité de l'espérance permet d'écrire que

$$E(Q) = \sum_{k=1}^{m} E\left(\frac{X_k}{X_1 + \cdots + X_n}\right) = \sum_{k=1}^{m} M_k.$$

Admettons un instant que $M_i = M_j$ pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Alors, par linéarité de l'espérance, on a

$$nM_k = M_1 + \cdots + M_n = E\left(\frac{S_n}{S_n}\right) = E(1) = 1,$$

donc $M_k = \frac{1}{n}$, et on conclut que

$$E\left(\frac{X_1 + \cdots + X_m}{X_1 + \cdots + X_n}\right) = \frac{m}{n}\cdot$$

Il reste donc à montrer que M_k ne dépend pas de k. Les variables aléatoires X_k étant implicitement supposées discrètes, on note $\mathscr{X}$ la partie au plus dénombrable de $\mathbb{R}_+^*$ qui est leur image commune : c'est légitime, car les X_k sont identiquement distribuées. Le théorème de transfert, puis l'indépendance, permettent d'écrire (pour autant qu'on puisse manipuler de telles sommes) :

$$E\left(\frac{X_i}{S_n}\right) = \sum_{(x_1,\dots,x_n)\in\mathscr{X}^n} \frac{x_i}{x_1 + \cdots + x_n} P\left(\cap_{k=1}^n (X_k = x_k)\right) = \sum_{(x_1,\dots,x_n)\in\mathscr{X}^n} \frac{x_i}{x_1 + \cdots + x_n} \prod_{k=1}^{n} P(X_k = x_k).$$

Comme X_i et X_j ont même loi, on remplace les termes $P(X_i = x_i)$ et $P(X_j = x_j)$ par $P(X_j = x_i)$ et $P(X_i = x_j)$ respectivement, puis on change de variable ($u_i = x_j$, $u_j = x_i$ et $u_k = x_k$ pour les autres indices) pour obtenir

$$E\left(\frac{X_i}{S_n}\right) = \sum_{(u_1,\dots,u_n)\in\mathscr{X}^n} \frac{u_j}{u_1 + \cdots + u_n} \prod_{k=1}^{n} P(X_k = u_k) = E\left(\frac{X_j}{S_n}\right),$$

en utilisant de nouveau l'indépendance.

Exercice 92 (★★☆) La première inégalité est classique : on introduit $B_k = A_k \setminus (\cup_{i=1}^{k-1} A_i)$. Les B_k sont 2 à 2 incompatibles, $P(B_k) \leqslant P(A_k)$ et $\cup_{k=1}^n B_k = \cup_{k=1}^n A_k$ donc

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = P\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) \overset{\sigma\text{-additivité}}{=} \sum_{k=1}^{n} P(B_k) \leqslant \sum_{k=1}^{n} P(A_k).$$

Pour l'autre inégalité, on utilise ce qu'on vient de montrer :

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = 1 - P\left(\bigcup_{k=1}^{n} \overline{A_k}\right) \geqslant 1 - \sum_{k=1}^{n} P\left(\overline{A_k}\right) = 1 - n + \sum_{k=1}^{n} P(A_k),$$

d'où le résultat.

Exercice 96 (★★★)

1) Pour tout $x \in]0,R[$, la substitution $y = 0$ donne $G(x)G(0) = \frac{1}{2}G(x)$. Comme G n'est pas identiquement nulle, on en déduit que

$$G(0) = \frac{1}{2}\cdot$$

2) Pour $x \in]-R,0[$, on a donc $G(x)G(0) = \frac{1}{2}G(-x)$ soit $G(x) = G(-x)$. La fonction G est donc paire, et en particulier tous ses coefficients d'indice impair sont nuls, soit pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(X = 2k+1) = 0$.

3) La fonction G est strictement positive sur $[0,R[$, on peut passer au logarithme et dériver par rapport à x, pour obtenir la relation

$$\frac{G'(x)}{G(x)} = \frac{xG'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}\,G\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}\cdot$$

En substituant x par 1, comme $G(1) = 1$, on obtient $G'(1) = \frac{G'(\sqrt{1+y^2})}{\sqrt{1+y^2}\,G(\sqrt{1+y^2})}$, pour tout y tel que $1 \leqslant \sqrt{1+y^2} < R$. Autrement dit

$$\forall x \in [1,R[,\ \frac{G'(x)}{xG(x)} = G'(1).$$

4) L'équation différentielle précédente se réécrit $G'(x) - xG'(1)G(x) = 0$, donc sur $[1, R[$, la fonction G est de la forme $x \mapsto \lambda e^{G'(1)x^2/2}$. La valeur $G(1) = 1$ donne $\lambda = e^{-G'(1)/2}$.

Comme G est développable en série entière et coïncide sur un intervalle non trivial avec la fonction $x \mapsto \lambda e^{G'(1)x^2/2}$ elle même développable en série entière, ces deux fonctions sont égales. La condition $G(0) = \frac{1}{2} = \lambda$ donne donc

$$G'(1) = 2\ln 2 = E(X) \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad G(x) = e^{\ln 2(x^2-1)} = 2^{x^2-1}.$$

On obtient en dérivant $G'(x) = x \ln 2 \cdot 2^{x^2}$ puis $G''(x) = \ln 2 \cdot 2^{x^2} + 2x^2(\ln 2)^2 \cdot 2^{x^2}$ pour tout $x \in]-R, R[$, donc

$$V(X) = G''(1) + G'(1) - G'(1)^2 = 4\ln 2.$$

Exercice 97 (★★★)

1) Les $\theta_n = P(T = n \mid T \geqslant n)$ appartiennent à $[0, 1]$ car ce sont des probabilités.

Supposons que, pour un certain n, on ait $\theta_n = P(T = n \mid T \geqslant n) = \frac{P(T=n)}{P(T \geqslant n)} = 1$. Alors $P(T = n) = P(T \geqslant n)$ et donc $P(T \geqslant n+1) = P(T \geqslant n) - P(T = n) = 0$ ce qui a été exclu. On en déduit que

$$\theta_n = P(T = n \mid T \geqslant n) \in [0, 1[.$$

2) Par définition d'une probabilité conditionnelle, $\theta_n = P(T = n \mid T \geqslant n) = \frac{P(T=n)}{P(T \geqslant n)} = \frac{P(T \geqslant n) - P(T \geqslant n+1)}{P(T \geqslant n)} = 1 - \frac{P(T \geqslant n+1)}{P(T \geqslant n)}$. Il en résulte que $\frac{P(T \geqslant n+1)}{P(T \geqslant n)} = 1 - \theta_n$. On peut alors écrire que (le produit ci-dessous est télescopique)

$$P(T \geqslant n) = \frac{P(T \geqslant n)}{P(T \geqslant 0)} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{P(T \geqslant k+1)}{P(T \geqslant k)} = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - \theta_k).$$

Comme $P(T \geqslant n)$ est le reste d'ordre $n - 1$ de la série convergente $\sum P(T = k)$, il tend donc vers 0 quand $n \to +\infty$, ce qui implique que $\ln(P(T \geqslant n)) \to -\infty$ quand $n \to +\infty$. D'après l'expression ci-dessus de $P(T \geqslant n)$, il en résulte que

$$\ln \prod_{k=0}^{n-1} (1 - \theta_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln(1 - \theta_k) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty,$$

donc $\sum \ln(1 - \theta_k)$ diverge. On raisonne alors différemment selon la limite de (θ_k)

— Si $\lim \theta_k = 0$ alors $\ln(1 - \theta_k) \sim -\theta_k$ et par équivalents de signe fixe, $\sum \theta_k$ diverge.

— Si la suite (θ_k) n'a pas zéro pour limite (en particulier, si elle n'a pas de limite), alors $\sum \theta_k$ diverge grossièrement.

3) Réciproquement, soit (θ_n) une suite d'éléments de $[0, 1[$ telle que la série $\sum \theta_n$ diverge.

On pose $u_0 = 1$ et pour tout $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = (1 - \theta_n)u_n$. La suite u_n est bien définie (on a alors $u_n = \prod_{k=0}^{n-1}(1 - \theta_k)$).

— Par produit des termes dans $]0, 1]$, tous les u_n sont dans $]0, 1]$.

— La suite (u_n) est décroissante

— On a $\ln(u_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln(1 - \theta_k) \to -\infty$ quand $n \to +\infty$, car c'est une série à termes négatifs divergente (même distinction de cas qu'avant de la divergence ou grossière divergence avec la comparaison par équivalence lorsque le terme général tend vers 0). On a donc $u_n \to 0$.

Il reste à poser

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n = u_n - u_{n+1}.$$

— Le nombre p_n est positif car (u_n) est décroissante.

— On a $p_n = u_n - u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant u_0 = 1$, car les u_n sont dans $]0, 1]$ et (u_n) est décroissante.

— Par télescopage et puisque $\lim u_n = 0$, $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = u_0 = 1$.

Un résultat du cours assure qu'il existe alors une variable aléatoire T à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ P(T_n = p_n)$, ce qui implique que $P(T \geqslant n) = u_n > 0$ et $P(T = n \mid T \geqslant n) = \theta_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ par construction.

Exercice 98 (★☆☆) La loi de T_n est donnée par $T_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$ et, pour tout $k \in T_n(\Omega)$,

$$(T_n = k) = [(X_n = k) \cap (Y_n \geqslant k)] \sqcup [(X_n \geqslant k+1) \cap (Y_n = k))].$$

Par σ-additivité de P et indépendance de X_n et Y_n,

$$P(T_n = k) = \frac{1}{n} \times \frac{n-k+1}{n} + \frac{n-k}{n} \times \frac{1}{n} = \frac{2n-2k+1}{n^2}\cdot$$

Son espérance et un équivalent de cette dernière sont donnés par

$$E(T_n) = \sum_{k=1}^{n} kP(T_n = k) = \frac{1}{n^2}\left((2n+1)\sum_{k=1}^{n} k - 2\sum_{k=1}^{n} k^2\right) = \frac{1}{n^2}\left((2n+1)\frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{3}\right)$$
$$= \frac{(n+1)(2n+1)}{6n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{3}\cdot$$

La loi de Z_n est donnée par $Z_n(\Omega) = [\![0, n-1]\!]$ et, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$,

$$(Z_n = 0) = \bigsqcup_{i=1}^{n} (X = i) \cap (Y = i),$$
$$(Z_n = k) = \bigsqcup_{i=1}^{n-k} [(X_n = i) \cap (Y_n = i+k)] \sqcup [(X_n = i+k) \cap (Y_n = i)].$$

Par σ-additivité de P et indépendance de X_n et Y_n, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$;

$$P(Z_n = 0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}$$
$$P(Z_n = k) = \sum_{i=1}^{n-k} \frac{2}{n^2} = \frac{2(n-k)}{n^2}\cdot$$

Son espérance et un équivalent de cette dernière sont donnés par

$$E(T_n) = \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k(n-k) = \frac{2}{n^2}\left(n\frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) = \frac{n+1}{n}\left(n - \frac{2n+1}{3}\right.$$

Les deux résultats sont cohérents : si l'espérance du minimum est équivalente à $\frac{n}{3}$, alors celle du maximum est équivalente à $\frac{2n}{3}$ par symétrie, donc celle de la distance doit être équivalente à $\frac{2n}{3} - \frac{n}{3} = \frac{n}{3}$.

Exercice 99 (★★☆)

1) On a $\theta(\Omega) = \left\{\frac{2k\pi}{n},\ 0 \leqslant k \leqslant n-1\right\}$, avec pour tout $k \in [\![0\,; n-1]\!]$, $P(\theta = \frac{2k\pi}{n}) = \frac{1}{n}$. Par conséquent,

$$E(\theta) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2k\pi}{n} = \frac{\pi(n-1)}{n}\cdot$$

Comme $Z = X + iY$ suit une loi uniforme sur $\mathbb{U}_n$,

$$E(Z) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}} = 0.$$

Il vient par linéarité $E(X) + iE(Y) = E(Z) = 0$ donc

$$E(X) = E(Y) = 0.$$

2) On a donc $\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E(XY)$ puisque $E(X) = E(Y) = 0$, ce qui implique que

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{4k\pi}{n}\right) = \frac{1}{2n}\mathrm{Im}$$

Pour $n \geqslant 3$, on a $e^{\frac{4i\pi}{n}} \neq 1$ donc $\sum_{k=0}^{n-1} e^{4ik\pi/n} = \frac{1-e^{4i\pi}}{1-e^{4ik\pi/n}} = 0$, donc $E(XY) = 0$, résultat encore valable pour $n = 1$ ou $n = 2$ car alors $Y = 0$ et donc $XY = 0$. Finalement,

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = 0.$$

3) Pour $n \geqslant 3$, il n'y a pas indépendance, en effet la contrainte $X^2+Y^2 = 1$ donne par exemple

$$P\left(X = 0, Y = \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right) = 0 \neq P(X=0)P\left(Y = \sin\left(\frac{2\pi}{2}\right)\right).$$

En revanche pour $n = 1$ ou $n = 2$, la variable Y est nulle donc indépendante de X.

Exercice 100 (★★☆) L'image de Y vaut $Y(\Omega) = \mathbb{N}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$P(Y=n) = P(X=2n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^{2n}}{(2n)!}$$

$$P(Y=0) = P(X=0) + \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = 2n-1) = e^{-\lambda} + \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{2n-1}}{(2n-1)!} = e^{-\lambda}\left(1+\operatorname{sh}(\lambda)\right).$$

On en déduit que

$$E(Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} nP(Y=n) = e^{-\lambda}\sum_{n=1}^{+\infty} n\frac{\lambda^{2n}}{(2n)!} = e^{-\lambda}\frac{\lambda}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{2n-1}}{(2n-1)!} = e^{-\lambda}\frac{\lambda}{2}\operatorname{sh}(\lambda).$$

De la même façon,

$$\begin{aligned} E(Y^2) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 P(Y=n) &= \frac{e^{-\lambda}}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}(2n(2n-1)+2n)\frac{\lambda^{2n}}{(2n)!} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^2}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{2n-2}}{(2n-2)!} + \frac{e^{-\lambda}\lambda}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{2n-1}}{(2n-1)!} \\ &= \frac{e^{-\lambda}\lambda^2}{4}\operatorname{ch}(\lambda) + \frac{e^{-\lambda}\lambda}{4}\operatorname{sh}(\lambda). \end{aligned}$$

D'où

$$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = \frac{e^{-\lambda}\lambda}{4}\left(\lambda\operatorname{ch}(\lambda) + \operatorname{sh}(\lambda) - \lambda e^{-\lambda}\operatorname{sh}^2(\lambda)\right).$$

Exercice 102 (★☆☆)

1) On note E l'évènement «M est diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$». On a $\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(E \cap [Y=1]) + \mathbb{P}(E\cap[Y=-1])$. Si on pose

$$M' = \begin{pmatrix} X_1^2 & X_2^2 \\ X_2^2 & X_1^2\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M'' = \begin{pmatrix} X_1^2 & X_2^2 \\ -X_2^2 & X_1^2\end{pmatrix},$$

alors M' (resp. M'') est indépendante de Y. On note aussi E' l'évènement «M' est diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ », et on définit de même E''. Alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(E) &= \mathbb{P}(E'\cap[Y=1]) + \mathbb{P}(E''\cap[Y=-1]) = \mathbb{P}(E')\times\mathbb{P}(Y=1) + \mathbb{P}(E'')\times\mathbb{P}(Y \\ &= (1-p)\mathbb{P}(E') + p\mathbb{P}(E''). \end{aligned}$$

Comme M' est symétrique réelle, on sait que $\mathbb{P}(E') = 1$. Ensuite, une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a\end{pmatrix}$$

a pour spectre complexe $\{a+ib, a-ib\}$. Si $b \neq 0$ elle n'est pas diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Si $b=0$ elle est diagonale, donc $\mathbb{P}(E'') = \mathbb{P}(X_2 = 0) = e^{-\lambda_2}$. Ainsi

$$\mathbb{P}(E) = 1 - p + pe^{-\lambda_2}.$$

2) Une matrice symétrique réelle n'a que des valeurs propres réelles. Donc l'étude précédente montre aussi que les évènements «M est diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ » et «M n'a que des valeurs propres réelles » sont confondus. La probabilité demandée est donc celle donnée à la question précédente.