Évaluation de révision.

Questions de cours.

Question de cours n°1 Donner trois CNS pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable.

Question de cours n°2 Donner les ensembles image, les lois, les espérances et les variances des lois de Bernoulli, binomiale, géométrique et de Poisson.

Question de cours n°3 Énoncer le théorème de convergence dominée à paramètre continu.

Question de cours n°4 Énoncer précisément le théorème de dérivation terme à terme de la somme d'une série de fonctions.

Un peu de calcul.

Calcul n°1 Via le changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$, calculer $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+t^a)}$ où $a \in \mathbb{R}_+$.

Calcul n°2 Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

Calcul n°3 Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation $x^2y'' + xy' + y = 0$ en effectuant le changement de variable $t = \ln x$.

Calcul n°4

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1, 2\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{-x^2 + x + 2}$.

- **a)** Trouver $a, b \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 2\}$, on a $f(x) = \dfrac{a}{1+x} + \dfrac{b}{2-x}$.
- **b)** Développer la fonction f en série entière et préciser le rayon de convergence.

2) Rayon de convergence et somme de $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{(n+1)(n-2)}{n!} x^n$.

QCM - cocher une case si la phrase qui suit est correcte.

Question n°1 Soit f une fonction continue sur $[a,+\infty[$ telle que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Notons $F(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

- ☐ F est définie sur $[a,+\infty[$.
- ☐ F est continue sur $[a,+\infty[$.
- ☐ F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,+\infty[$.
- ☐ F est dérivable sur $[a,+\infty[$ et $\forall x \in [a,+\infty[$, $F'(x) = f(x) - \lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$.

Question n°2 Soient f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[0,+\infty[$, telles que $\displaystyle\int_1^{+\infty} (f+g)(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

- ☐ Alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent.
- ☐ Pour tout réel λ, $\displaystyle\int_1^{+\infty} (f+\lambda g)(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
- ☐ Alors par linéarité, $\displaystyle\int_1^{+\infty} (f+g)(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$.
- ☐ Alors $f+g$ admet une limite en $+\infty$ et cette limite est nulle.

Question n°3 Pour tout réel x on note f la fonction $t \longmapsto \mathrm{e}^{-2t}\sqrt{1+x^2\mathrm{e}^{2t}}$. On peut dire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge,

- ☐ car f est continue sur $[0,+\infty[$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$.
- ☐ car f est continue sur $[0,+\infty[$ et $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.
- ☐ car f est continue sur $[0,+\infty[$ et $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-t}$.
- ☐ car f est continue sur $[0,+\infty[$ et $f(t) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2$.

Question n°4 Soient f et g deux fonctions continues sur $[0,+\infty[$.

- ☐ Si f et g sont intégrables sur $[0,+\infty[$ alors fg est intégrable sur $[0,+\infty[$.
- ☐ Si f et g sont intégrables sur $[0,+\infty[$ alors $f-g$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.
- ☐ Si $f+g$ est intégrable sur $[0,+\infty[$, alors f et g sont intégrables sur $[0,+\infty[$.
- ☐ Si f^2 et g^2 sont intégrables sur $[0,+\infty[$ alors fg est intégrable sur $[0,+\infty[$.

Question n°5 Soit A une matrice carrée d'ordre 3 telle que $A^3 = 2A^2$.

- ☐ Alors $A^3 - 2A^2$ est un polynôme annulateur de A
- ☐ Alors $X^3 - 2X^2 = 0$ est un polynôme annulateur de A
- ☐ Alors $A^2(A-2) = 0$, donc A est la matrice nulle ou $A = 2$.
- ☐ Alors les valeurs propres de A sont 0 et 2.

Question n°6 Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

- ☐ J est une matrice de rang 1.
- ☐ 1 est une valeur propre de J.
- ☐ Le noyau de J est égal à $\Big((1,-1,0,0),(1,0,-1,0),(1,0,0,-1)\Big)$.
- ☐ J admet exactement 2 valeurs propres et J est diagonalisable.

Question n°7 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

- ☐ 0 est une valeur propre de A car 0 est un des coefficients diagonaux de A.
- ☐ -1 est une valeur propre de A car les colonnes de $A + I_3$ sont toutes égales.
- ☐ 2 est une valeur propre de A car la somme des coefficients par ligne est égale à 2.
- ☐ A est une matrice inversible.

Question n°8 Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie n. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que $Sp(f) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_r\}$.

- ☐ Notons pour tout entier i de $[\![1, r]\!]$, e_i un vecteur propre associé à λ_i, alors la famille $(e_1, \cdots, e_r)$ est une base de E.
- ☐ Alors $\forall i \in [\![1, r]\!]$, $\dim(E_f(\lambda_i) \geqslant 1$.
- ☐ Alors les sous-espaces propres $E_f(\lambda_1)$, $\cdots$, $E_f(\lambda_r)$ sont en somme directe.
- ☐ Alors $\chi_f(X) = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)$.

Question n°9 Soit f un endomorphisme de E, un espace vectoriel de dimension finie.

- ☐ Si $\chi_f(X)$ est scindé sur $\mathbb{R}$ alors f est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
- ☐ Si f est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ alors $\chi_f(X)$ est scindé à racines simples.
- ☐ Si f n'est pas bijectif, alors 0 est une racine de $\chi_f(X)$.
- ☐ $\chi_f(X)$ est un polynôme de degré n et de coefficient dominant égal à 1.

Question n°10 Soient $X_1, \cdots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi.

- ☐ Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $P\Big((X_1 \leqslant x) \cap (X_2 \leqslant x) \cap \cdots \cap (X_n \leqslant x)\Big) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leqslant x) = P(X_1 \leqslant x)^n$.
- ☐ Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(\min(X_1, \cdots, X_n) \geqslant x) = \bigcap_{k=1}^{n} P(X_1 \geqslant x)$.
- ☐ Alors $X_1 + \cdots + X_n$ suit la même loi de nX_1.
- ☐ Si X_1 admet une variance, alors $X_1 + \cdots + X_n$ admet une variance et $V(X_1 + \cdots + X_n) = nV(X_1)$.

Question n°11 Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$. Soit Y une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

- ☐ Pour tout réel x, $\mathbb{P}(Y \leqslant x) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}_{(X=k)}(Y \leqslant x)$.
- ☐ pour tout réel x, $\Big((Y \leqslant x), (Y > x)\Big)$ est un système complet d'événements.
- ☐ Pour tout entier n, $\mathbb{P}\left((Y \leqslant 1) \cap (X = n)\right) = \mathbb{P}(X = n)\mathbb{P}_{(X=n)}(Y \leqslant 1)$.
- ☐ Pour tout entier n, $(X = n)$ est un élément de $\mathscr{A}$.

Question n°12 Soit X une variable aléatoire admettant une espérance et une variance non nulle.

- ☐ D'après l'inégalité de Markov, $\forall a > 0,\ P(X \geqslant a) \leqslant \dfrac{E(X)}{a}$.
- ☐ Pour tout couple de réels (a, b), $aX + b$ admet une espérance et $V(aX + b) = aV(X) + b$.
- ☐ Alors la variable aléatoire $X(X-1)$ admet une espérance et $E(X(X-1)) = V(X) + E(X)^2 - E(X)$.
- ☐ La variable aléatoire $X^* = \dfrac{X - E(X)}{\sqrt{V(X)}}$ est une variable aléatoire centrée réduite.

Exercices classiques.

Exercice classique n°1

1) Soit X un ensemble, (g_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{C}$ et g une fonction de X dans $\mathbb{C}$. Donner la définition de la convergence uniforme de la suite de fonctions (g_n) vers la fonction g.

2) On pose $f_n(x) = \dfrac{n+2}{n+1} \mathrm{e}^{-nx^2} \cos(x\sqrt{n})$.

a) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n).

b) La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0, +\infty[$?

c) Soit $a > 0$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a, +\infty[$?

d) La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $]0, +\infty[$?

Exercice classique n°2 Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $v_n = \dfrac{u_n}{S_n}$. L'objectif est de comparer la nature de $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

On pourra traiter les cas où $\sum u_n$ converge ou diverge, et dans ce dernier étudier la série de terme général $w_n = \ln\left(1 - \dfrac{u_n}{S_n}\right)$ pour $n \geqslant 1$.